天下文化

跳出思路的陷阱

有趣的推理

Aha! Gotcha

Paradoxes to Puzzle and Delight

by Martin Gardner

薛美珍 譯

Aha! Gotcha —Paradoxes to Puzzle and Delight

by Martin Gardner

天下人知識系列①

封面設計／蔡泉安

跳出思路的陷阱

—有趣的推理

葛登能 著

薛美珍 譯

「天下人知識系列」序

做一位值得驕傲的「天下人」

編輯部

經濟人、社會人、文化人

現代的進步社會需要一個人在同一時空中，兼有「經濟人」的理念、「社會人」的胸懷與「文化人」的氣質。

「經濟人」追求的是經濟效率與自我負責。經濟人有他財富的滿足，也有他精神的空虛。

「社會人」追求的是社會公平與福利分享。社會人有他四周的共鳴，也有他信

念的落空。

「文化人」追求的是文化提升與精緻生活。文化人有他心靈的飛揚，也有他物質的匱乏。

企業人不是生意人

當「企業」變成了專業，從事企業的人就要做「企業人」。「企業人」不是生意人，因此不模仿生意人的貪婪、短視、俗氣。企業人所表現的是有朝氣、有原則；肯學習、肯嘗試。他也許沒有很多的財富，但他一定有不少的智識；他不懂得什麼是商場上的花招，但他懂得什麼是商業的道德；他不會隨波逐流，但一定會力爭上游。

一位驕傲的「企業人」有他日積月累的專業知識、堅定不渝的職業道德與拾級而上的事業理想。

在我們的字典中，企業人實在就是企業家的謙稱。這一稱謂，並不是因職位之高與薪水之多就唾手可得。要使「企業人」的稱謂實至名歸，需要自己有計畫、有恆心的去贏取。

耐心、雄心、良心

爲什麼在經濟景氣中仍有廠商倒閉？爲什麼在經濟蕭條中仍有企業成長？一個重要的答案就是，這個企業是否具有專業知識、職業道德與事業理想的企業文化，這一企業主持人是否具有這「三業」的特質。

要追求這「三業」是一條走不盡的路。他需要吸取日新月異的專業知識；他需要面對傳統與現代價值觀念的衝突；他需要克服心理上的壓力；他需要拒絕不合法賺錢的誘惑；他需要突破事業上的挫折；他更需要不斷的自我鞭策。

一位有責任心的企業人有他的企業耐心、企業雄心與企業良心。

「天下人知識系列」

把經濟人、社會人、文化人與企業人的理念與胸懷糅融在一起，就變成了我們所提倡的「天下人」。「天下人」所需的現代知識、前瞻性的觀念，以及對生活層面的透視，不能單靠自己單獨摸索而獲得。

天下文化出版公司經過長期的精心策畫，參照國際潮流、社會背景以及當前國情，推出「天下人知識系列」，來滿足「天下人」在事業上、智識上、心理上的需求。

這些書有些是約請專家撰寫的，有些是譯述的。每本書約在六、七萬字之間，力求簡明、實用、生動。

透過這一系列，我們相信每一位「天下人」都能擁有更多的專業知識、更高的職業道德與更好的事業理想。

序—矛盾的趣味與魅力

在酒店裡，就是這些流傳久遠、古老的矛盾，讓大夥笑成一團。

——莎士比亞劇本奧塞羅第二幕，第一景。

如果我們把這話稍加修改為「茶餘飯後，聽聽各種老的、新的矛盾，總能讓人會心一笑。」就是對本書頗傳神的描述。「矛盾」(paradox)一詞有許多意義，在這兒我用的是廣義的解釋，只要是結果與常識和直覺相反的，會讓人覺得詫異的，我都稱之為「矛盾」，可分成四種：

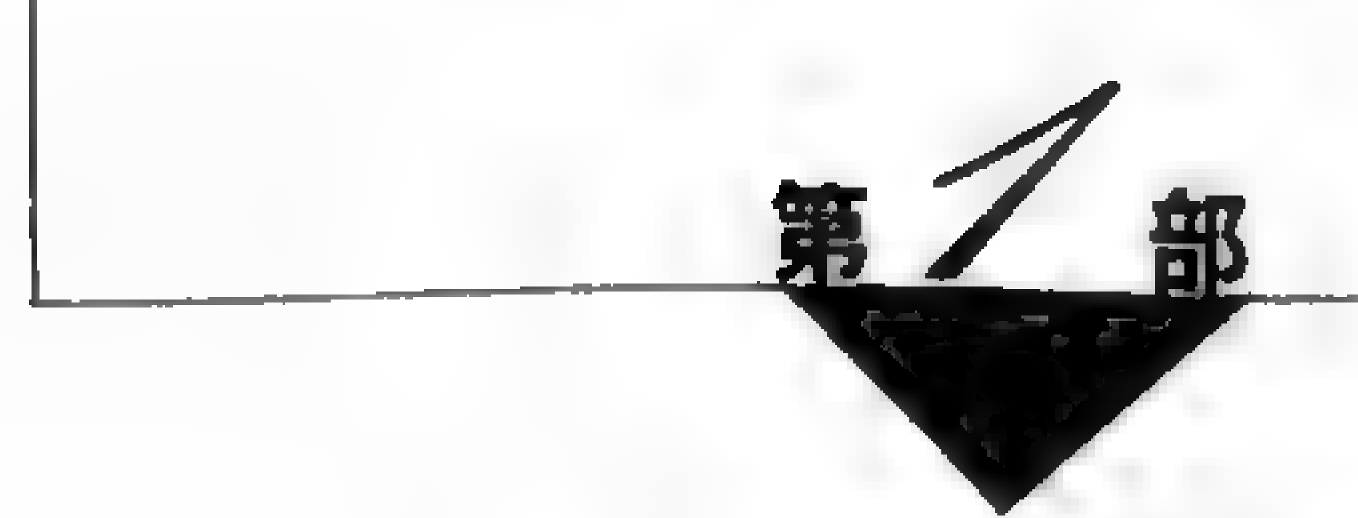
1. 看起來假的命題，其實是眞的。
2. 看起來眞的命題，其實是假的。
3. 看似沒錯的推理過程，其實會導致邏輯上的矛盾〔這類的矛盾通常稱爲謬誤(fallacy)〕。
4. 無法決定眞或假的命題。

對數學家和科學家而言，矛盾不僅僅是笑話而已，他們會從矛盾中引出許多深入的觀念。例如早期的希臘思想家，不管用多麼精細的尺，就是無法量出正方形對角線的長度，可是卻也因此才導出無理數(irrational numbers)的觀念。

從矛盾中我們可獲益良多。就像看魔術表演，我們都很想知道魔術師的戲法是怎麼變的，不過他是不會洩漏機密的；而數學家則能告訴你矛盾的巧妙何在。整本書中，我都儘量用非專業性的語言，簡單明瞭地解釋爲什麼會造成那些矛盾。相信你會從其中的思考過程得到很多樂趣。

——葛登能(Martin Gardner)一九八一年十一月

目錄



邏 輯

1 邏 輯

1 邏 輯

1 邏 輯

1 邏 輯

1 邏 輯

1 邏 輯

邏輯不僅在數學上，更在演繹推論的過程上扮演重要的角色。看起來沒錯的論證(argument)過程，會導致出人意料的明顯矛盾。就好像說，有個論證證明了二加二等於四，可是又能證明二加二不等於四。到底是那裏出了錯？這種嚴重的錯誤，是不是有可能一直隱藏在演繹思考的過程中？

為了解決這些古典的矛盾，才使得現代邏輯理論和集合理論有長足的進步。羅素(Bertrand Russell，一八七二—一九七〇，英國數學家和哲學家）鑽研了多年，百思不解，後來才和懷海德(Alfred North Whitehead)合著了「數理原則」(Principia Mathematica)—一部不朽的巨著，提供現代邏輯和數學完整的基礎。

矛盾不僅製造問題，本身也正是問題的解答。在本章中，由矛盾解出的問題，包括：

1.是不是有些情況，在邏輯上不可能正確預測它的未來。

2.為什麼集合理論，多半都排除「自己的元素中包括自己」的集合這種結構？

3.在討論語言時，為什麼一定要分清楚用來描述的語言（即對象語言，object

language，譯按：描述某一對象或事態所使用的語言）和說明語言的語言（即後設語言，metalanguage，譯按：用來描述或說明語言的語言）？

解答這些問題的矛盾，都含有循環推理(circular reasoning)或以本身爲參考體(self-reference)的性質。在邏輯上，如果以本身爲參考體，會有兩種可能：不是理論被推翻，就是理論會更豐富更有趣。問題就在如何讓理論豐富，而不是走向自我矛盾。矛盾的發明主要是爲了測試我們的邏輯觀念是否有漏洞。

不要誤以爲現代邏輯上的矛盾都已找到解答，還早得很呢！康德(Immanuel Kant，一七二四—一八〇四，十八世紀德國哲學家）曾大言不慚地說過，在他的時代，邏輯已經發展到最高境界，不會再有任何發展了。今天我們來看康德時代所瞭解的邏輯，不過是現代邏輯中一小部分的基礎。邏輯學家對於絕大部分的現代邏輯，在意見上還是相當分歧的，總是還有許多矛盾問題留待解答，以及許多尚未成形的問題存在。

說謊者矛盾

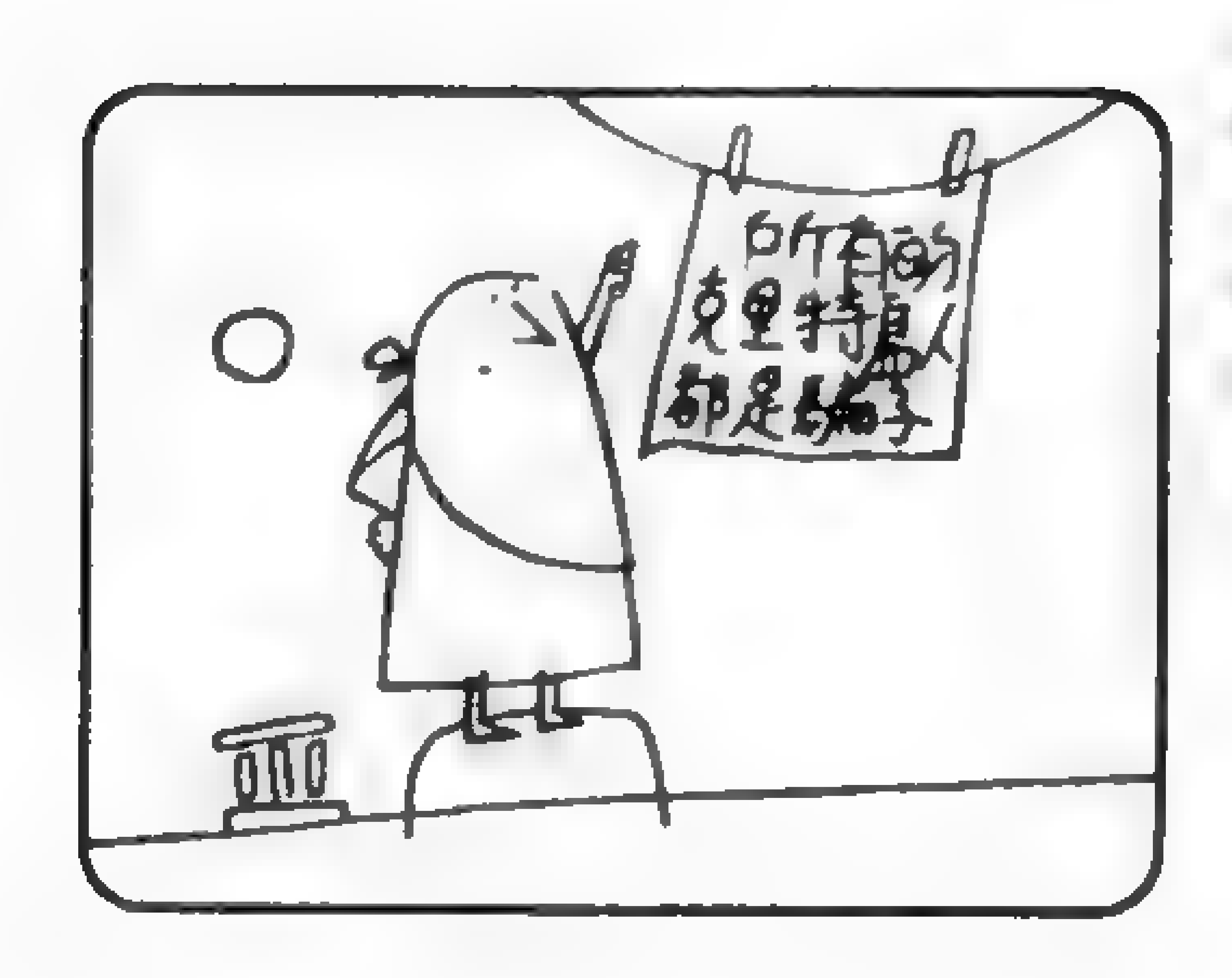


圖1：愛比美尼德斯(Epimenides)的名言是：「所有克里特島人都是騙子。」，想想他自己也是個克里特島人，那麼他說的話是真的嗎？

愛比美尼德斯是位西元前六世紀的傳奇性希臘詩人，他住在克里特島上。傳說他曾睡了五十七年之久。

他有句名言在邏輯上是矛盾的。這個名言是：假設騙子說的一定是謊話，那麼不是騙子的人（我們稱爲老實人）說的一定是眞話。在這個假設下，「所有克里特島人都是騙子」這句話不可能爲眞，因爲愛比美尼德斯是克里特島人，所以他是騙子，講的就是謊話；可是這句話也不可能爲假，若爲假，那愛比美尼德斯就是老實人，說的就是眞話了。

古時候希臘人常爲了一個既不爲眞也不爲假、又不會有自相矛盾的命題，百思不得其解。有位斯多噶學派(Stoic)的哲學家克理西柏斯(Chrysippus)，寫了六篇「說謊者矛盾」的論文，至今沒有一篇留存下來；還有位希臘詩人，據說瘦得弱不禁風，要在脚上綁塊鉛才不會被風吹走。他爲了苦思這些矛盾的解答而早逝。在新約聖經中，聖保羅(Saint Paul)重覆他給提多(Titus)書信中的矛盾：「克里特島人有位先知說過這樣的話：『克里特島人總是撒謊，而且非常野蠻，好吃懶做。』」他

這話沒有講錯……」（新約提多書第一章第十二—十三節）。

不曉得聖保羅有沒有察覺這段話中的矛盾。（譯按：聖保羅自己也是克里特島人。）

這句話是假的

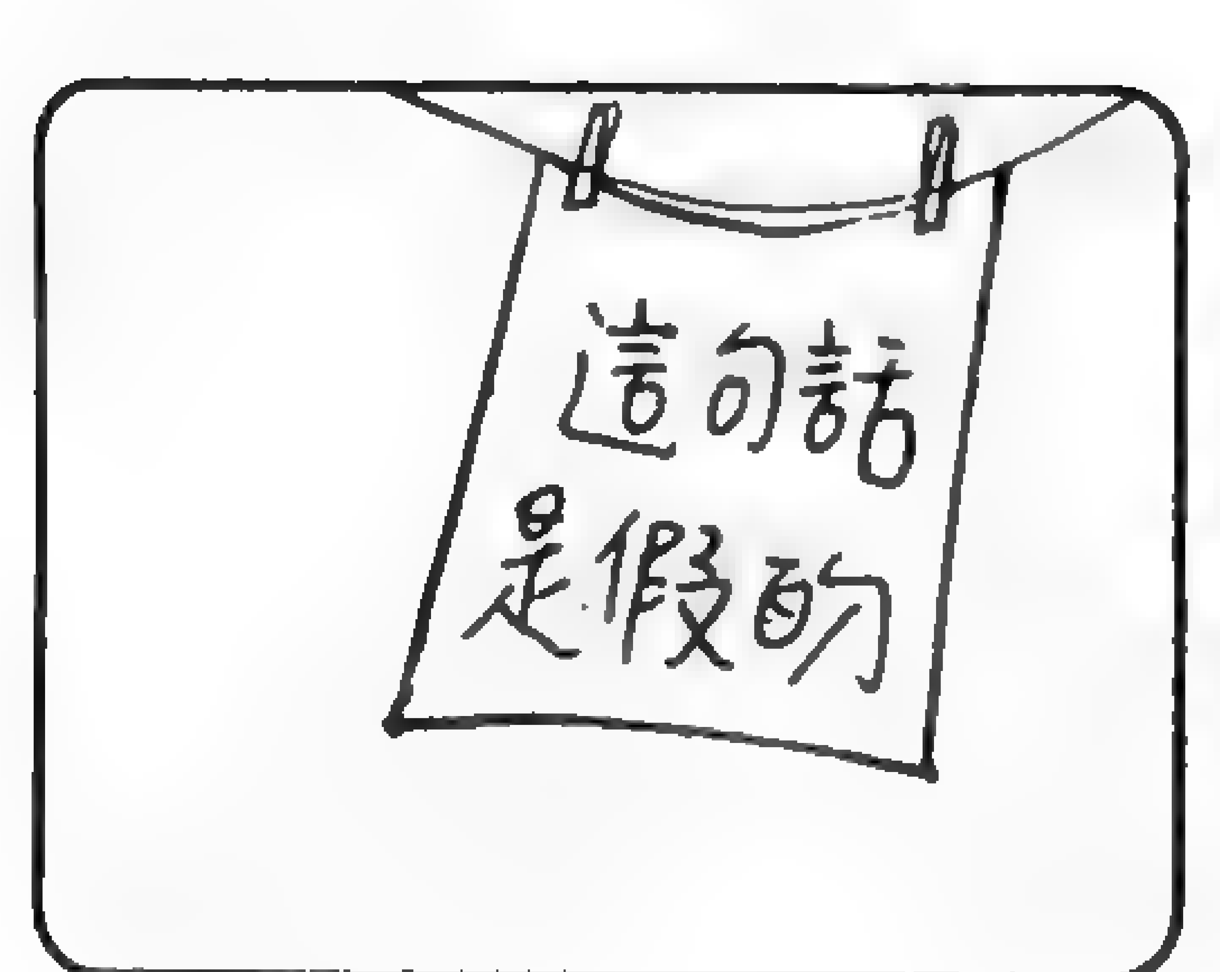


圖１：我們常掉入這種惡名昭彰的「說謊者矛盾」陷阱中。最簡單的例子就是：「這句話是假的。」這句話是真的嗎？如果是，那麼這句話是假的；它是假的嗎？如果是，那麼它是真的。類似的矛盾，在日常生活中，屢見不鮮。

爲什麼這種形式的矛盾—討論句子本身的句子，能使矛盾更加清楚呢？因爲它能澄清「說謊者總是說謊」和「說眞話的人總是說眞話」之間的含糊意義。

有各式各樣的例子。羅素曾表示，他相信哲學家摩爾(George Edward Moore)一生中只撒過一次謊。所以當有人問摩爾，他是否總是說實話時，他想了一會兒後，回答說：「不是」。

在幾則小品故事中，「說謊者矛盾」扮演了主要角色。我最喜歡的一則是唐撒尼(Lord Dunsany)寫的「發誓」(Told Under Oath)，收集在他較不爲人知的詩選「電離層的鬼影及其他幻想」(The Ghost of the Heaviside Layer and Other Fantasies)中。故事中唐撒尼碰到一名男士。這位男士發誓他所說的故事，句句屬實，毫無半句虛言。

故事好像是這名男士在宴會中碰到撒旦，兩人達成協議，讓他以後總是能一桿進洞—他原本是高爾夫球俱樂部中球打得最差勁的一位。由於他不斷的打出一桿進洞，每個人都認爲他可能有作弊，於是他被逐出俱樂部。故事的結局是唐撒尼問這

名男子：撒旦拿走什麼東西作爲交換。那名男士說：「撒旦剝奪了我說眞話的能力，我從此再也不能說眞話了。」

鈕扣與塗鴨

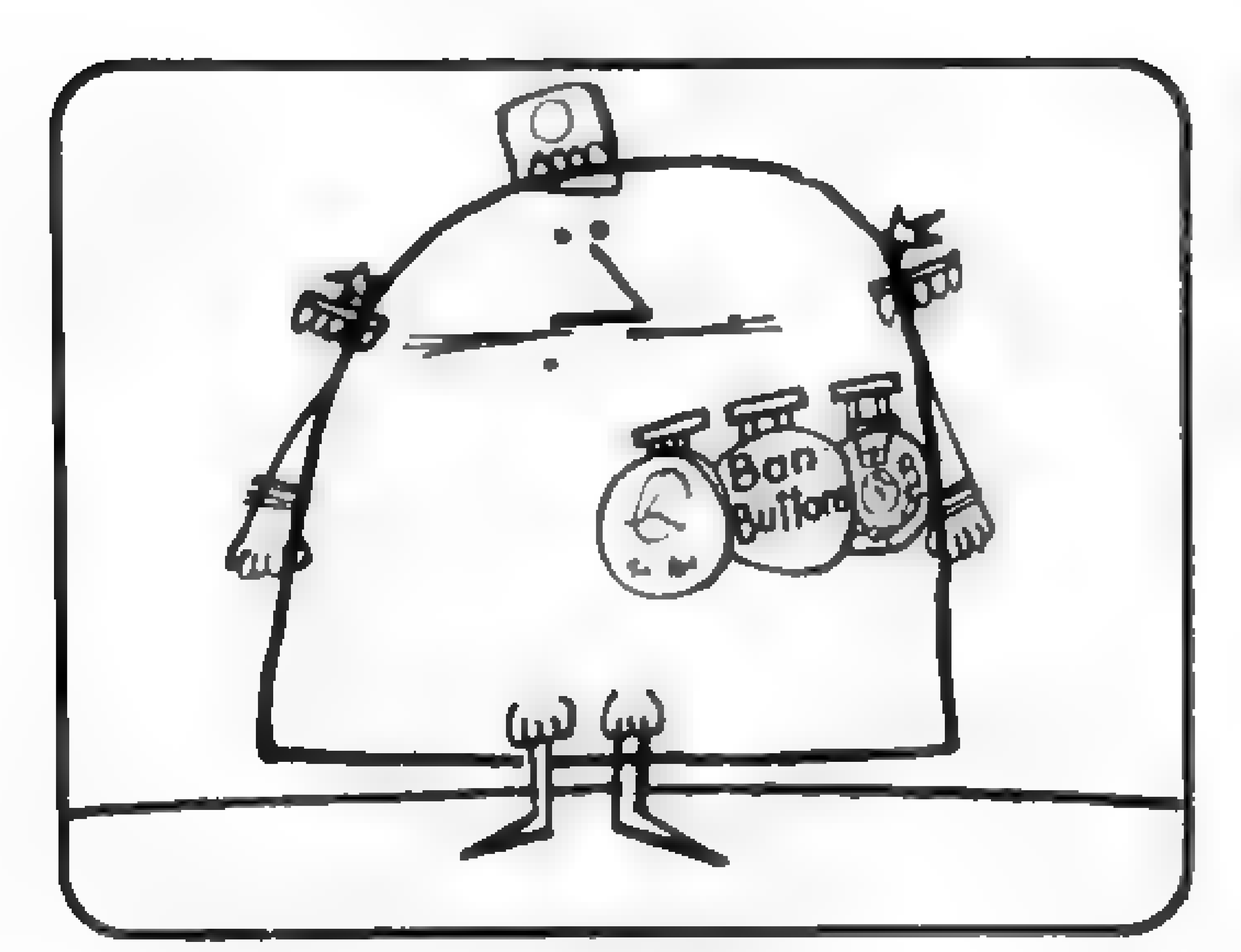


圖 1 ：還記得以前流行鈕扣上頭寫著：「不要用鈕扣」。

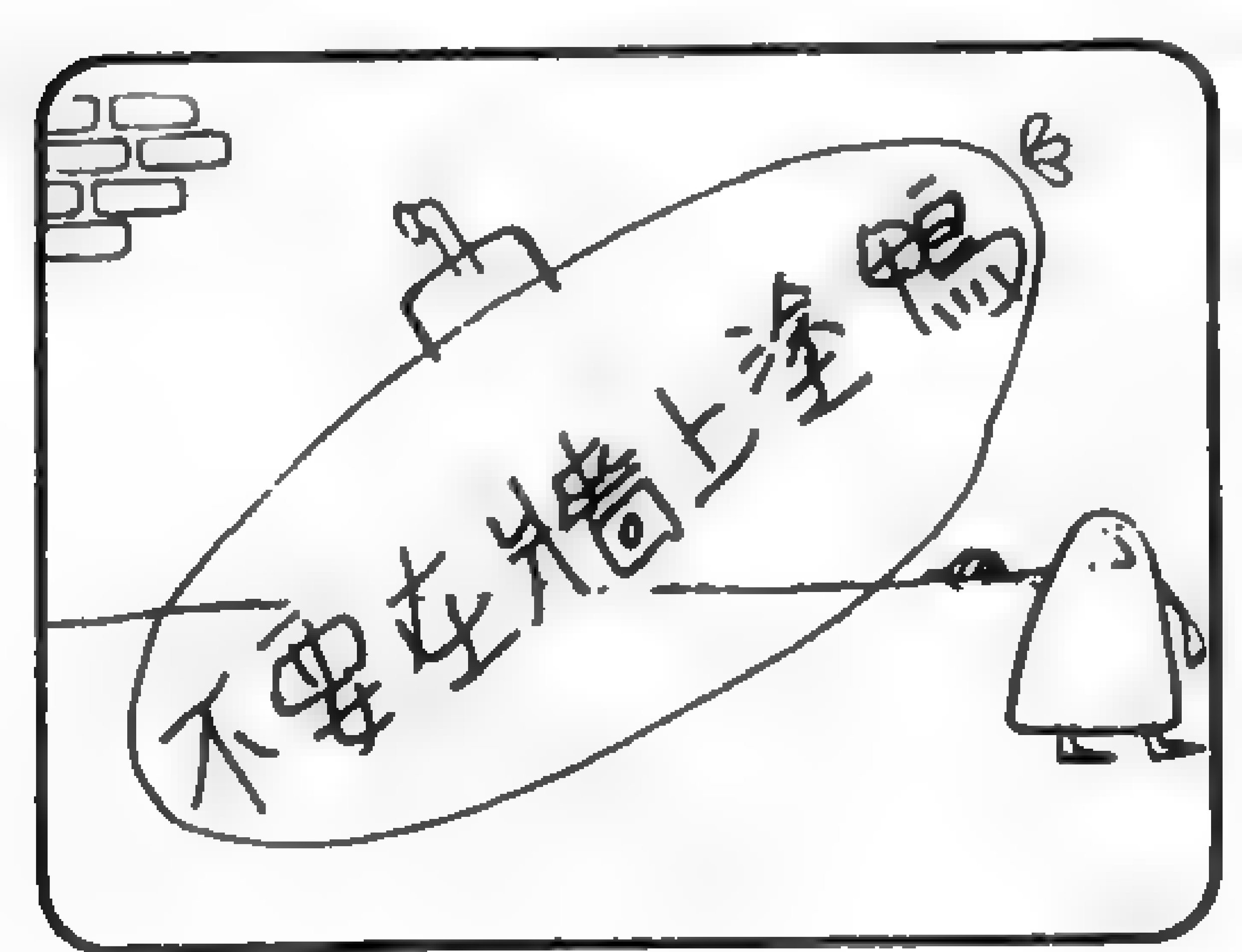


圖 2 ：或是在牆上看到「不要在牆上塗鴨 。」

爲什麼這些句子自打嘴巴？因爲句子裏說不要作的它自己全都作了。這類例子不勝枚舉，貼紙上頭寫著：「不要貼貼紙。」，標幟上寫著：「不要看這個標幟。」；單身漢說：「我只會娶看不上我、不願嫁給我的女人。」，黏在牆上的牌子寫著：「萬一這個牌子掉落，請通知本人。」

這類自相矛盾的說法（很類似說謊者矛盾）還有很多，例如：「所有的知識都是可疑的」，以及蕭伯納(George Bernard Shaw)的名言：「唯一的金科玉律是不要相信任何金科玉律」。

有一首五行俗謠(limerick，譯註：是種五行的滑稽詩，一、二、五行押一韻，三、四行另押一韻)，是這樣寫的：

克魯威這地方有位年輕女郎，
她的五行詩結束在第二行。

這並無矛盾之處，可是它激發出的續篇是：

凡爾登這地方有位少年郎。

詩便結束了，這兒的矛盾是什麼？是你的腦中自動出現第二行：「他的五行詩結束在第一行。」或是五行詩卻不到五行的念頭？

一位合衆國際社（UPI）的特派員，在一九七〇年四月二十四日報導：奧勒岡州（Oregon）的候選人，只能在選票上候選人名字的下頭，寫上十七個字的標語。來自尤金區（Eugene）競選民主黨國會議員的海奇（Frank Hatch）用的標語是：「用十七個字的標語來思考的人不應參選」。（譯註：此句正好十七個字。）

一九〇九年，著名的英國經濟學家馬歇爾（Alfred Marshall）寫道：「凡是有關經濟的簡短句子，先天上就有問題。」

住在康乃狄克州（Connecticut）新迦南區（New Canaan）的瓊生女士（Threba Johnson）告訴我，有天她和小孫子玩抽許願骨的遊戲（wishbone，玩法是兩人先自行許願，然後抽骨頭，誰抽到較長的骨頭，誰的願望就能成眞）。小孫子贏了後，問奶奶的願望是什麼？她說她的願望是：希望小孫子贏。那麼她贏了嗎？如果她抽到的是較長的一根骨頭，她算贏嗎？

如果教宗（指前任教宗）宣稱所有的教宗，不論是過去的、現任的和未來的，都並非無過錯，這代表什麼意思？

雜誌上有則廣告：「您想識字嗎？速成函授班，來信請寄到下面這個地址。」

以自己爲參考體，即使不構成矛盾，也會很有趣。在賀蒙斯(Paul R. Halmos)所著「有限向量空間」(Finite Dimensional Vector Spaces)一書的索引中有一條是：「赫斯柴德(Hochschild)，全科醫生(G．P．)，第一百九十八頁」。而全書都沒提到赫斯柴德此人，只有出現在索引中，而且正好在第一百九十八頁上。施孟彥(Raymond Smullyan)曾爲一本邏輯謎題的書命名爲「此書書名爲何？」；二年後，他又爲第二本書命名，是本關於日常生活上矛盾的書，叫做「本書無需書名」。

一句話正反說

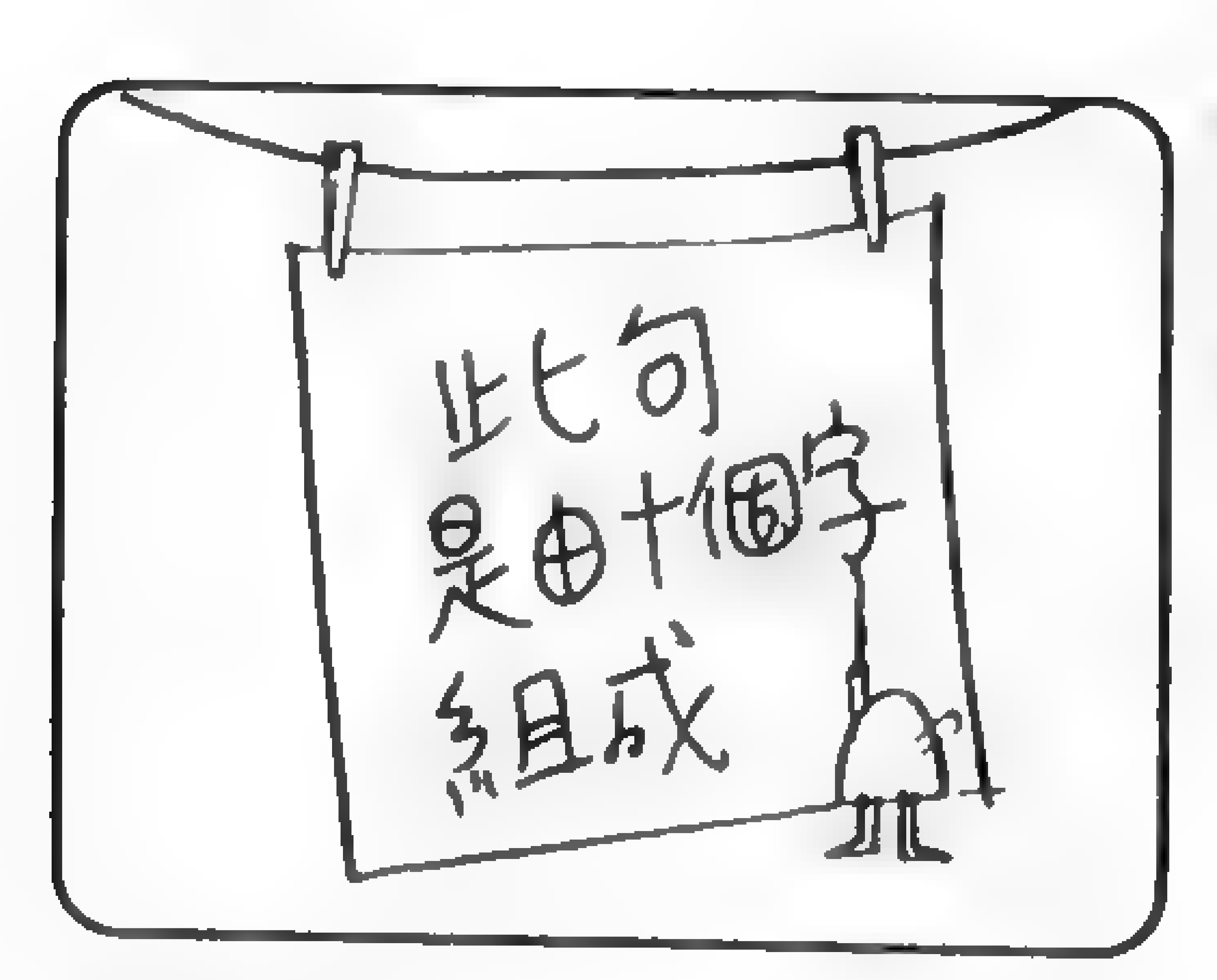


圖1：圖中的句子有多少個字？九個，所以顯然這個句子是錯的，那麼這個句子的否定就是真的囉？

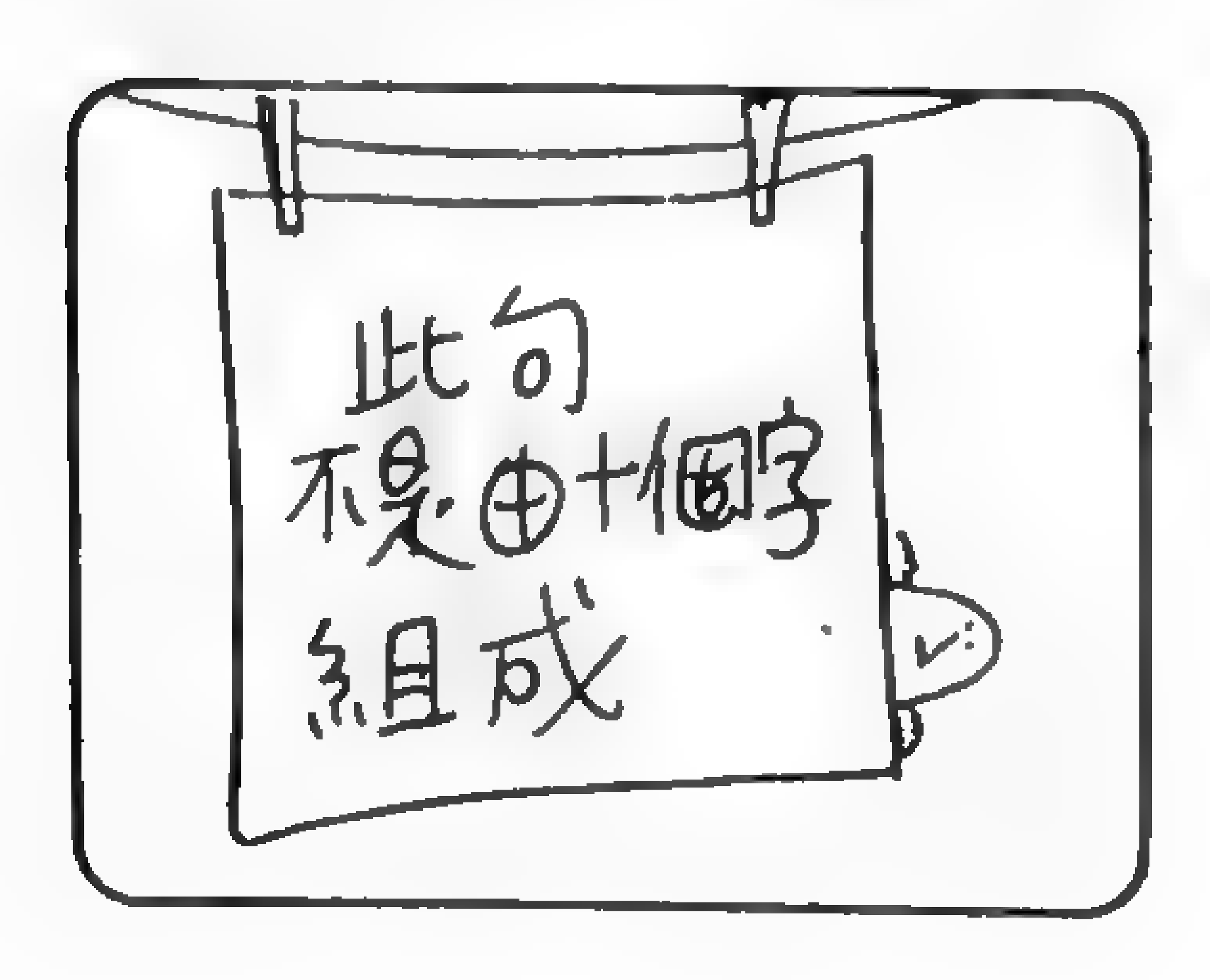


圖2：這句還是錯，它的否定剛好有十個字。我們如何才能解決這個奇怪的兩難困境？

還有個不知眞假值的矛盾：下面敍述中有三個命題是錯誤的，你能指出來嗎？

1. 二加二等於四
2. 三乘六等於十七
3. 八除以四等於二
4. 十三減六等於五
5. 五加四等於九

解答：只有命題二和命題四是錯的。因此斷言這五個命題中有三個錯誤是錯的，此即第三個錯誤。這個說法對嗎？

無限迴復

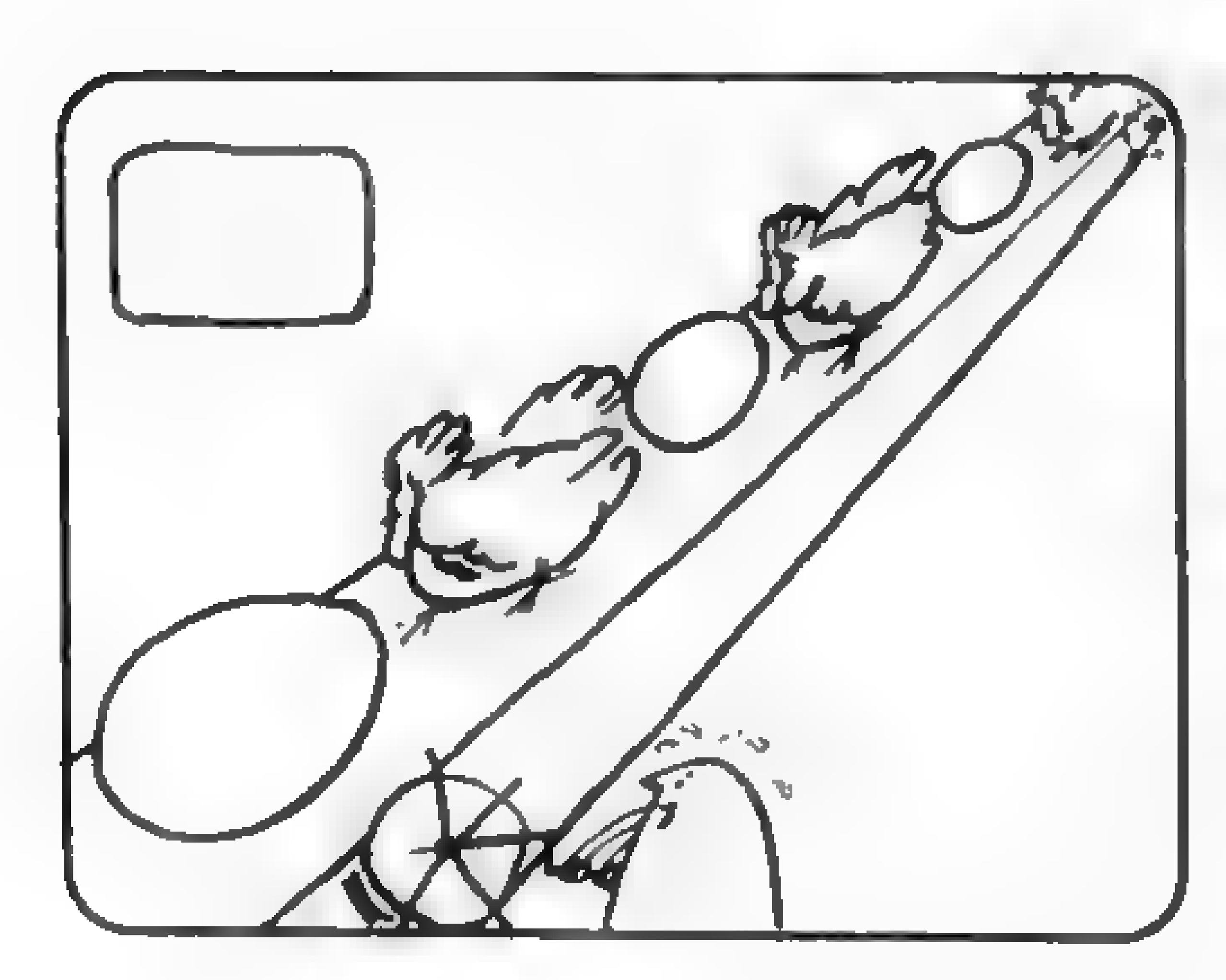


圖1：對於「先有蛋?還是先有雞?」這個老問題，電腦和人都一樣傷腦筋。先有雞?不對，雞是由蛋孵出來的；那是先有蛋嘍?也不對，蛋要有雞才能生出來。

這個「先有雞還是先有蛋？」的老問題，是邏輯學家所謂「無限迴復」(infinite regress)最常見的例子。桂格麥片以前包裝盒子上頭，有張桂格老人拿著麥片盒的照片，盒上又有張更小的桂格老人拿著麥片盒的照片，一直重複下去。作家常把這種「迴復」用到小說中，在赫胥黎(Aldous Huxley，英國小說家及批評家)所著的「點對點」(Point Counter Point)這本小說中，寫到一位小說家郭里斯(Philip Quarles)在寫一本關於小說家的小說，那本小說是關於一位小說家正在……。在紀德(Andre Gide)的小說「偽幣製造者」(Counterfeiters)和康明斯(E. E. Cummings)的劇本「他」(Him)之中，都用了類似的手法，在梅勒(Norman Mailer)的短篇故事集——「筆記本」(The Notebook)中，寫的就是一位年輕作家，得到一個故事的靈感，這靈感正是梅勒現在在寫的故事。

史威夫特(Jonathan Swift，格列佛遊記的作者)曾在一首詩中，描寫無盡迴復的跳蚤。後來數學家迪摩根(Augustus De Morgan)把這首詩改寫成：

大跳蚤的背上有小跳蚤在咬牠們，

而小跳蚤背上又有更小的跳蚤……

直到無限小；

而大跳蚤也站在更大的跳蚤背上……

直到無限大。

科學上有兩個無限迴復的老問題，恐怕永遠無解。第一個問題是：我們擴張中的宇宙卽是全部，或者只是某個更大系統（我們目前對它尙一無所知）中的一部分？第二個問題方向正好相反—朝小的方向來看，電子是最終的粒子(particle)或是在電子的內部結構中，還有更小的組成部分？現在物理學家相信，很多粒子都是由夸克(quarks)的結合所組成。那麼夸克又是由更小的物質所組成的嗎？有些物理學家認爲，不論是往更大或更小發展，結構的層次都沒有盡頭，就好像沒有最小的分數，也沒有最大的正整數。

柏拉圖—蘇格拉底矛盾

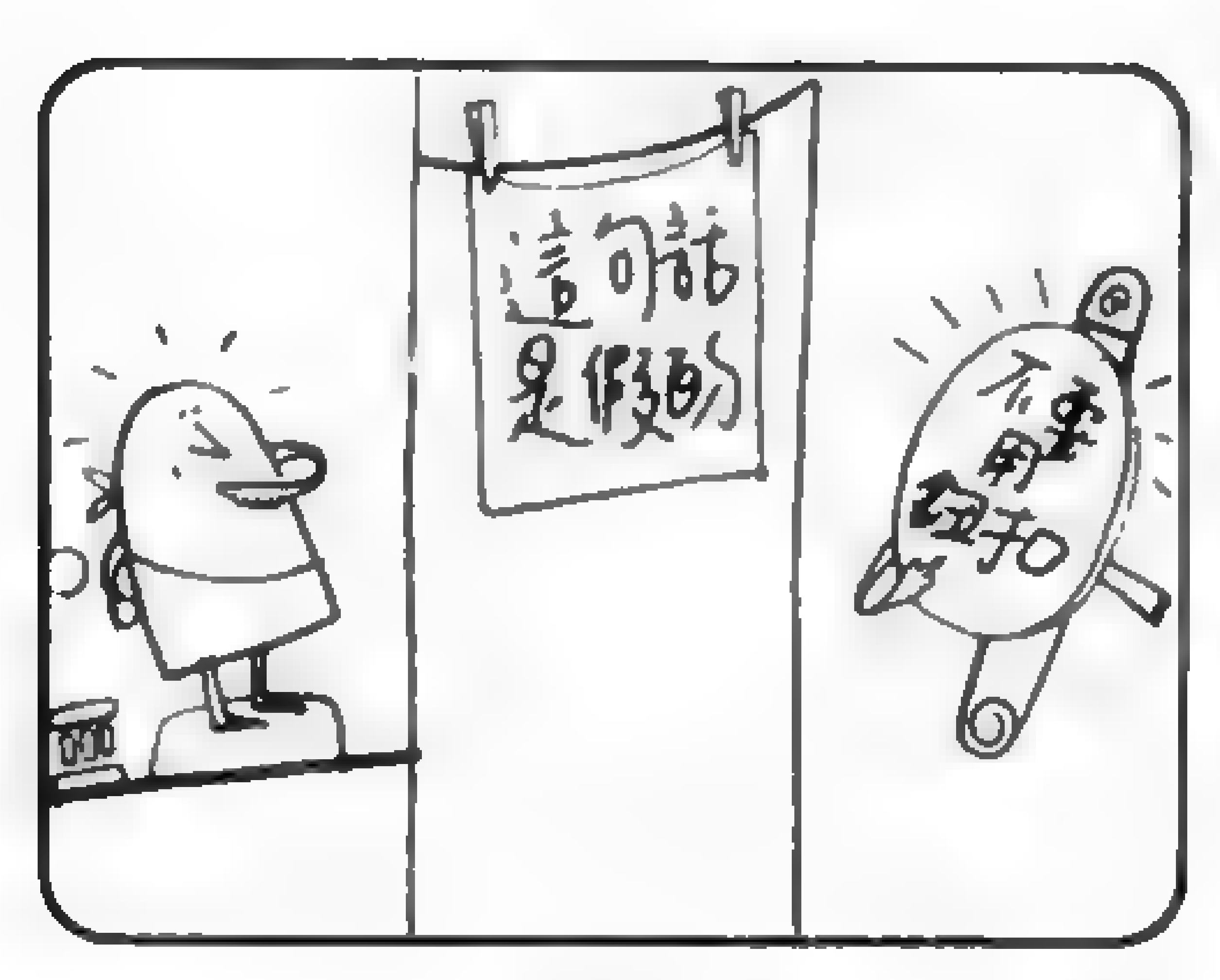


圖1：讓我們想一下圖中的內容—克里特島人談論克里特島人；描述句子本身的句子；鈕扣上的字論及鈕扣。所有這些述句(statement)好像都談到自己，是不是因爲他們都以本身爲參考體，所以才惹出麻煩？



圖2：即使古希臘人也知道，就算不以本身爲參考體也無濟於事，下面的對話可爲證明。柏拉圖：「下面蘇格拉底所說的話是假的。」蘇格拉底：「柏拉圖說的是眞的。」

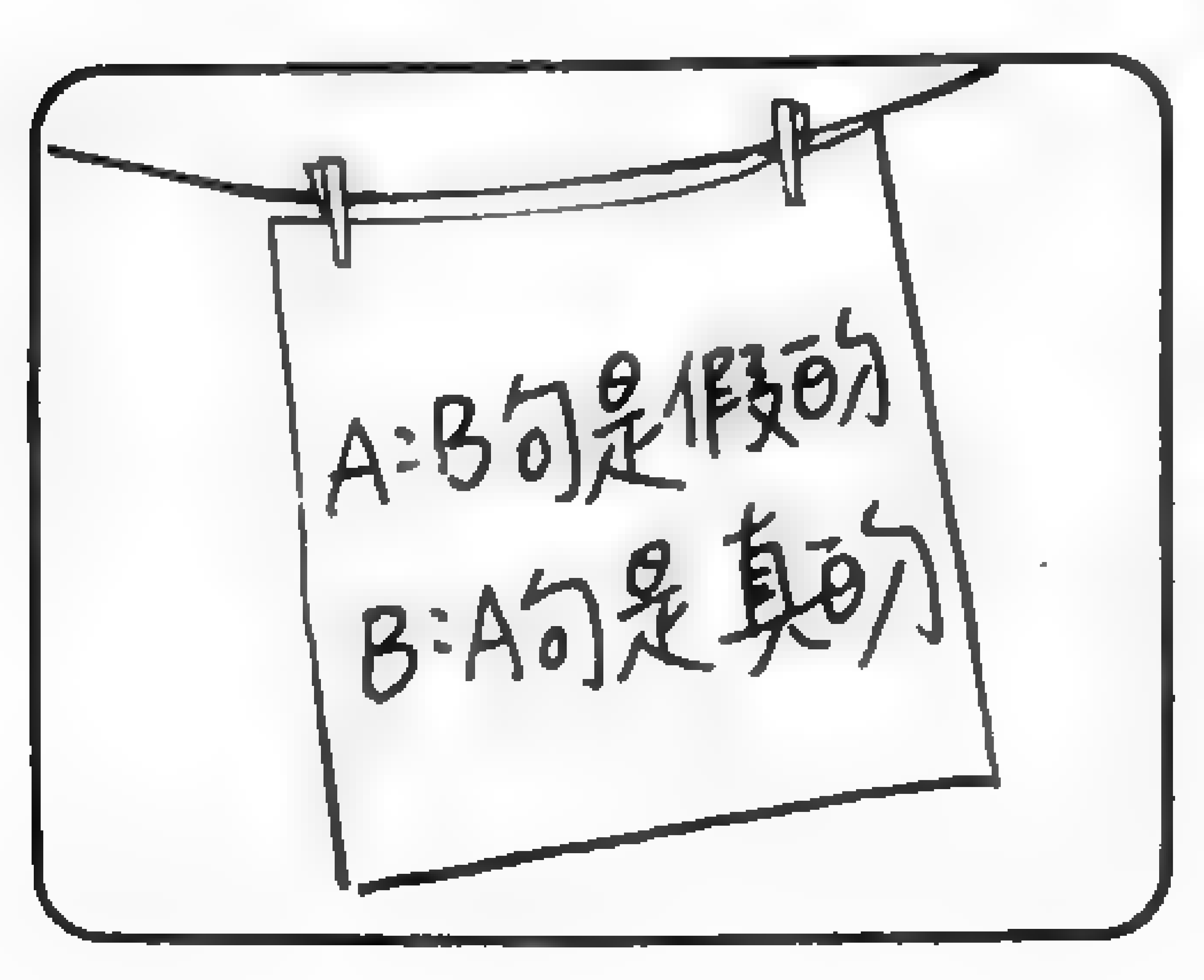


圖3：理則學家將「柏拉圖—蘇格拉底矛盾」簡化成圖中的兩句。不論那一句爲眞，都會與另一句打架。這兩個句子都沒有提到本身，但是放在一起，就出現了所謂的「說謊者矛盾」。

中世紀的理則學家常談論這類「說謊者矛盾」。它們很重要，因為它們證明了造成混淆的原因，多半是出於眞假值(truth-value)的矛盾，而非以本身爲參考體的關係。如果A句爲眞，則B句是假的；如果B句爲假，則A句必爲假。但是如果A句爲假，那麼B句就爲眞；如果B句爲眞，那麼A句必爲眞。現在我們又回到了起點，整個過程就這樣不斷重複下去，就像喜劇片中，一對警探不斷繞著一棟大樓追逐著對方。這兩句話都沒談到句子本身，可是放在一塊兒，就不斷地改變對方的眞假值，所以無法決定哪一句爲眞，哪一句爲假。

你可能很想給朋友看看下面的矛盾紙牌，它是由英國數學家裘丹(P.E.B. Jourdain)設計的。

紙牌的一面印著：

> 這張牌另一面上的句子是眞的。

反面印著：

> 這張牌另一面上的句子是假的。

很多人把牌翻來覆去很多次後，才瞭解他們正陷於一個無窮的循環中，每個句子輪流地變換眞假。

鱷魚和小孩

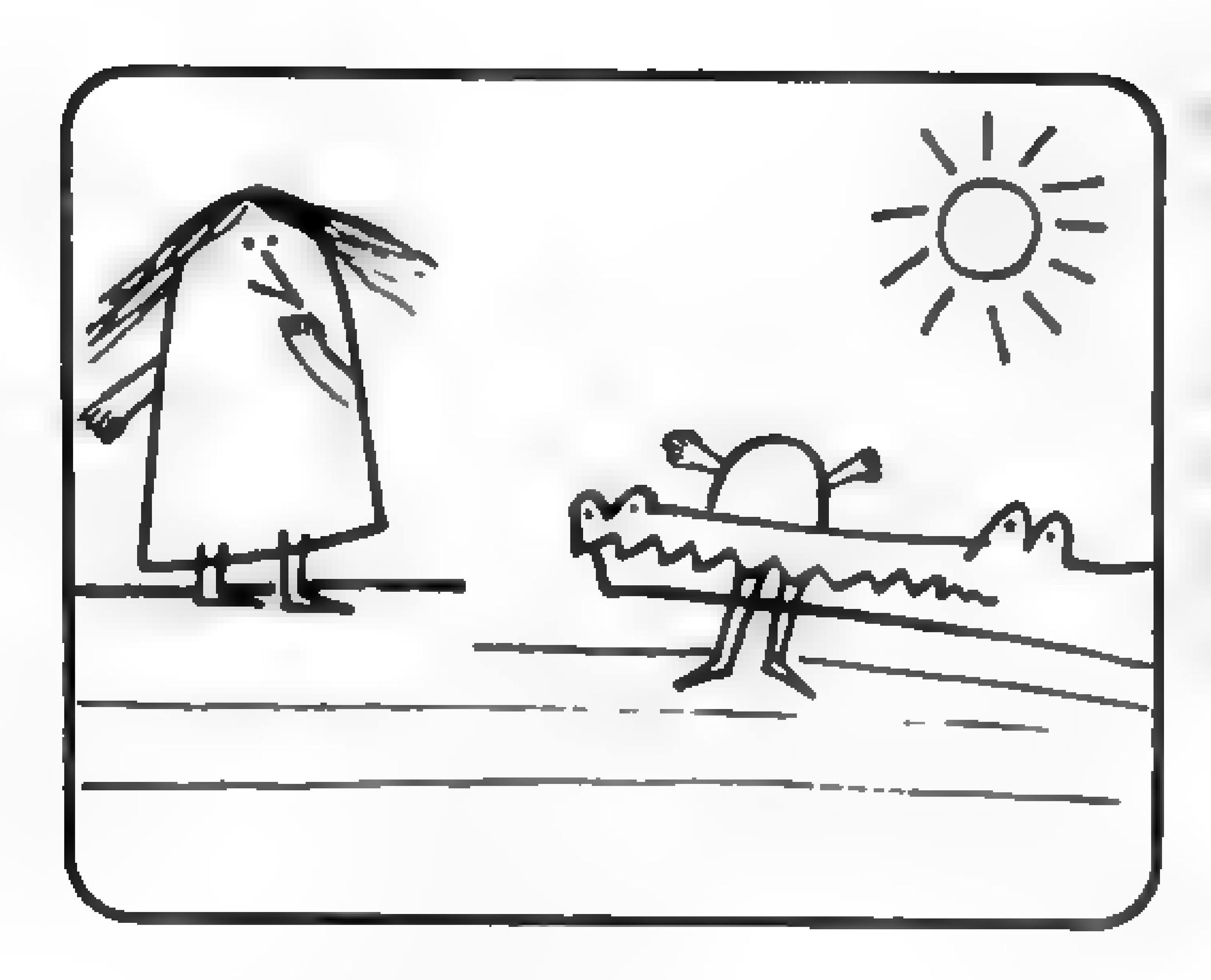


圖1：希臘哲學家喜歡講的一個故事，是有關於鱷魚從一位母親手中攫取她的寶寶的故事。鱷魚：「我會吃掉你的寶寶嗎？如果你答對了，我就把寶寶毫髮不傷的還給你。」母親：「天啊！你會把我的寶寶吃掉的。」

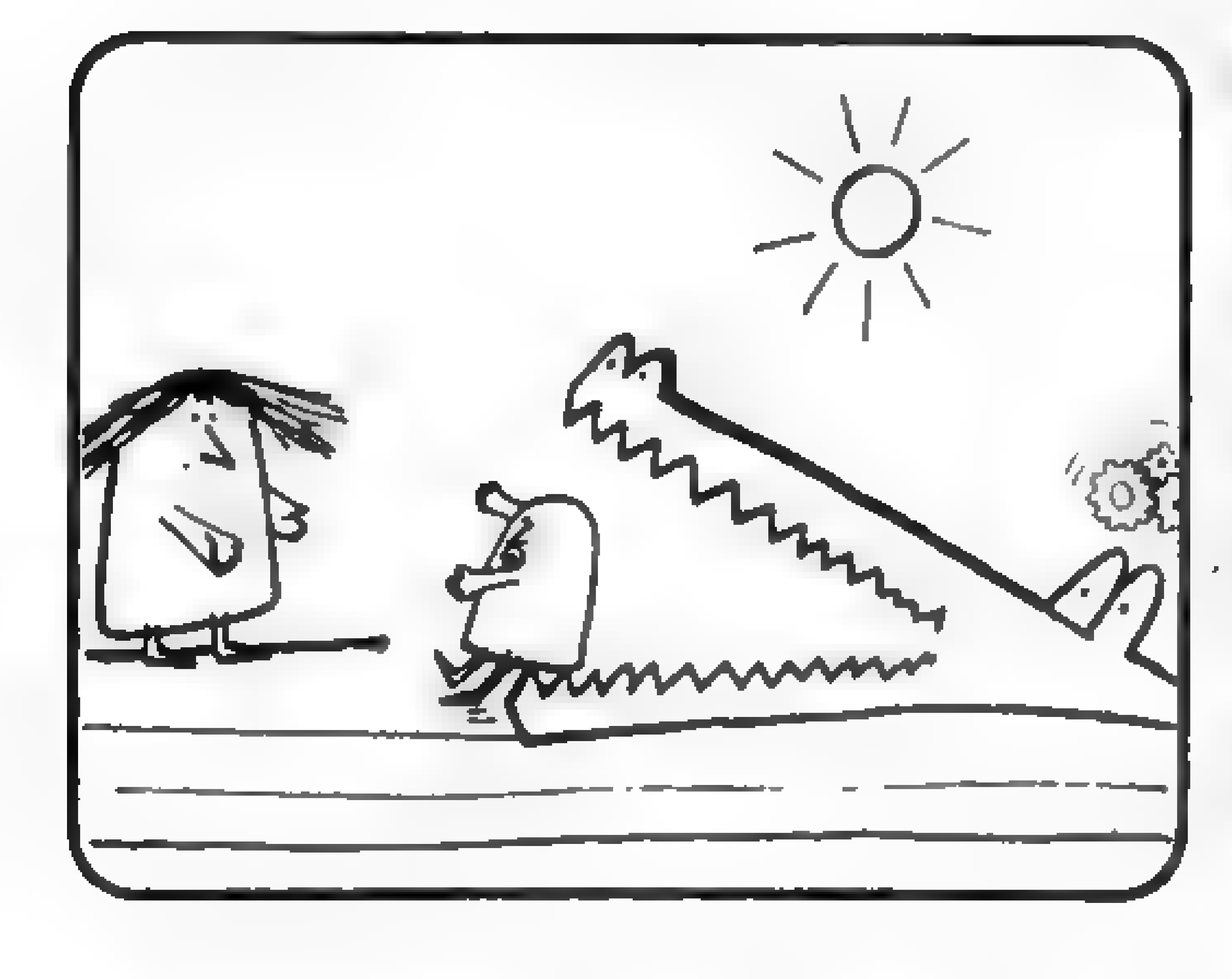


圖2：鱷魚：「嗯！現在我該怎麼做呢？如果我把孩子還給你，那麼你就說錯了，所以我可以吃掉你的孩子……(考慮一陣後)，既然這樣，我不要把孩子還給你。」母親：「可是你一定得把孩子還給我。如果你吃我的孩子，那表示我說對了，根據你的承諾，你必須把孩子還給我。」

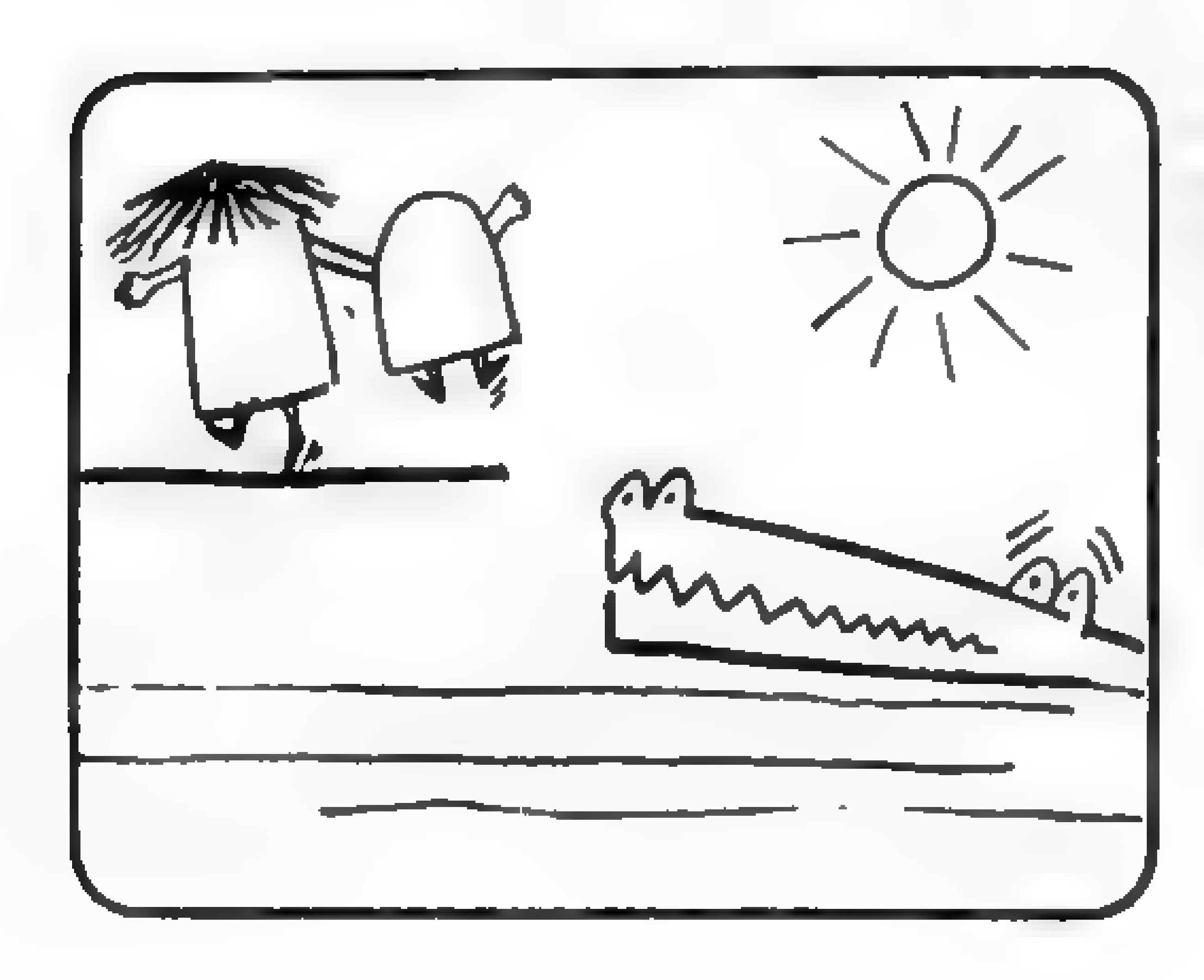


圖3：可憐的鱷魚被搞得頭昏腦脹，就把孩子還給了母親。她馬上抓著孩子、拔腿便跑。鱷魚：「噯呀！假如她說的是我會把孩子還給她，那麼我就可享有一頓可口的大餐了。」

這隻鱷魚有個困境，牠必須同時吃了孩子，又把孩子還給母親。

這位母親很機靈。假設她對鱷魚說的是「你將把孩子還給我。」那麼鱷魚可以選擇把孩子還回去，或是吃掉；任一種作法都不會造成矛盾。如果鱷魚把孩子還給母親，那麼母親是說對了，鱷魚便該信守諾言；可是換個角度看，如果鱷魚心眼夠壞，把孩子吃了，這麼一來母親就說錯了，鱷魚就沒有義務要把孩子交還。

唐吉訶德矛盾

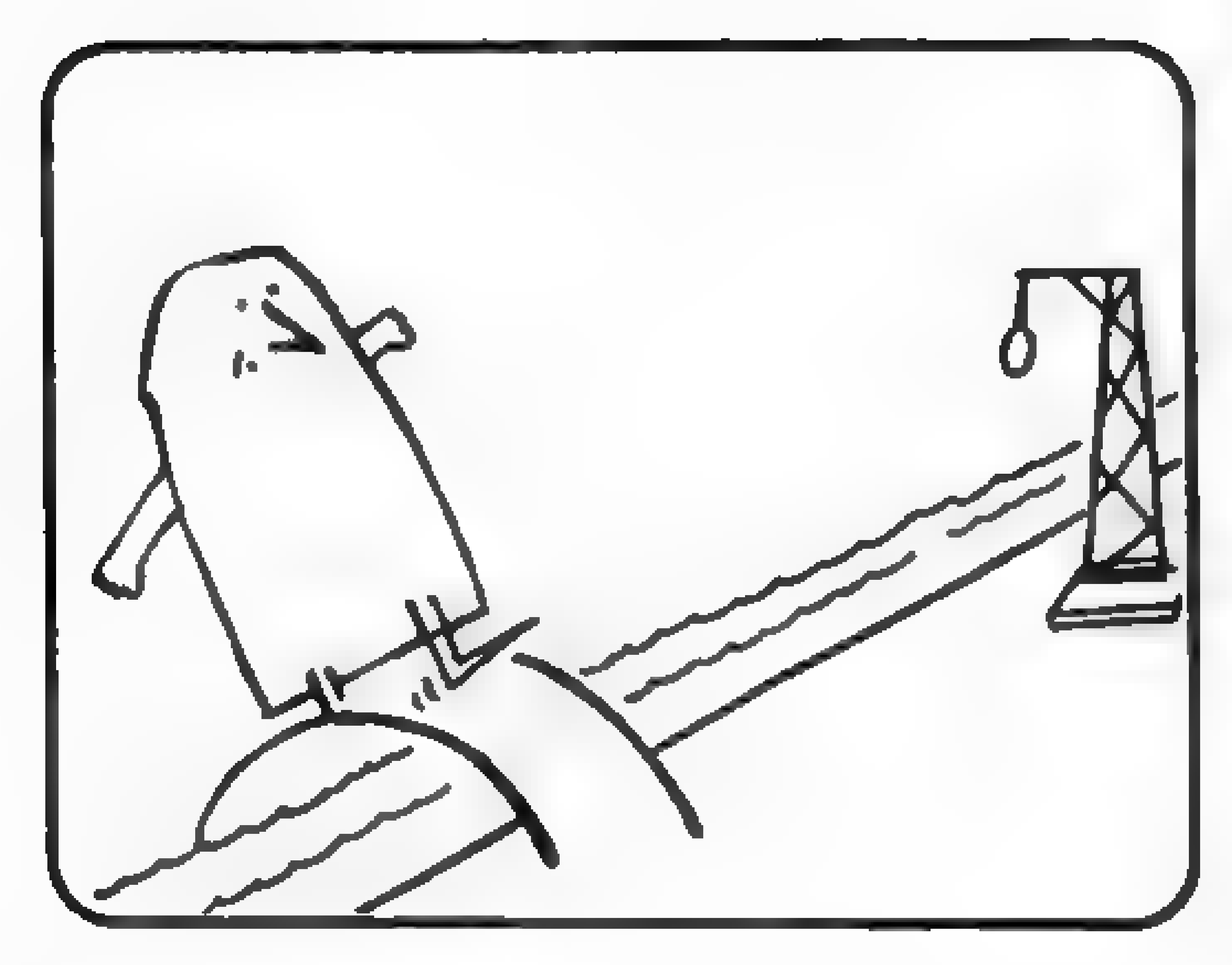


圖1：小說「唐吉訶德傳」(Don Quixote)中，提到一個小島，那兒有條奇怪的法律——警衛會詢問每位遊客：「你爲什麼來這兒?」如果遊客說的是實話，那就沒事；如果遊客說謊，他會被吊死。

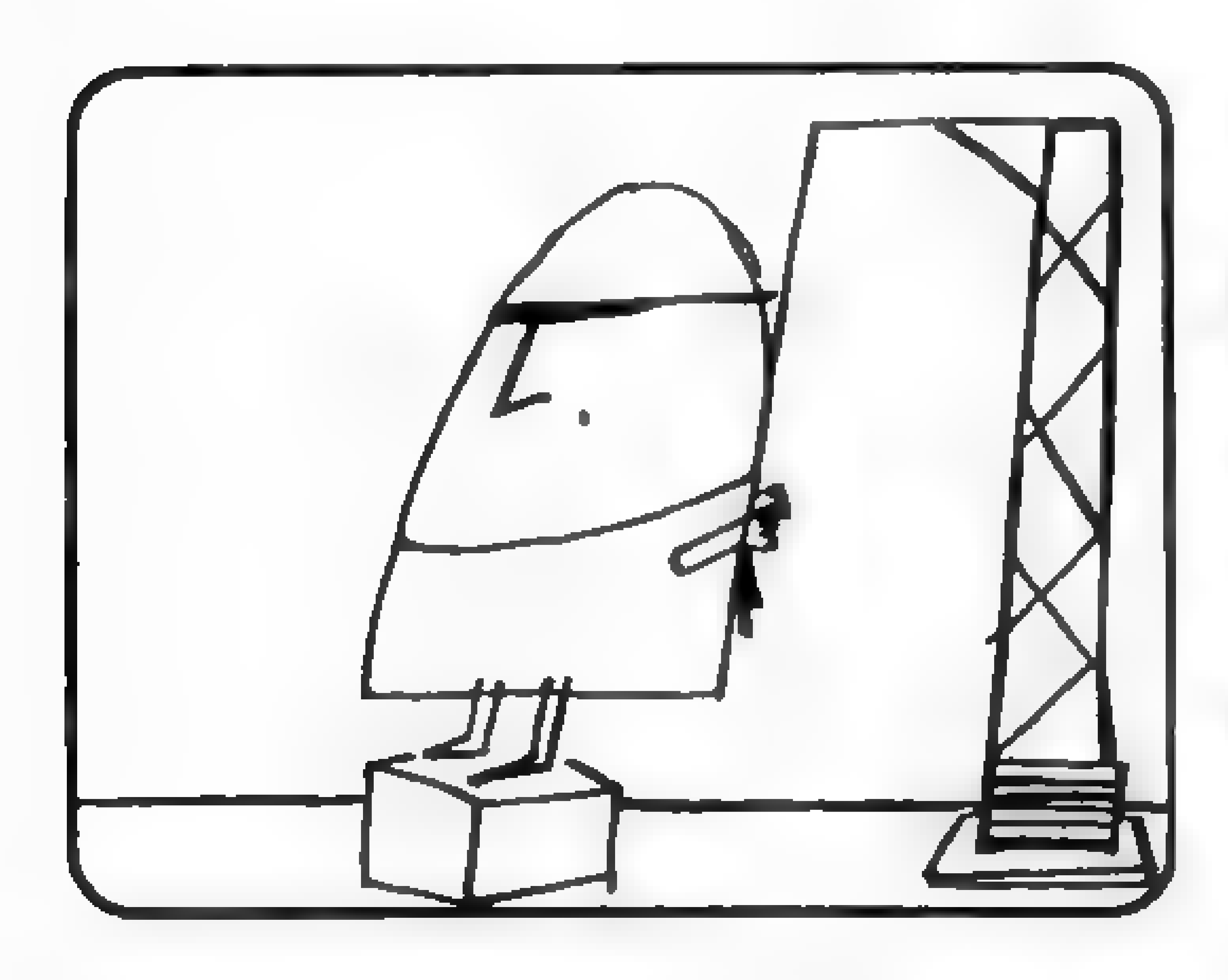


圖2：有天一位遊客回答：「我來這兒是爲了被吊死！」這一來警衛和上個故事中的鱷魚一樣都楞住了。如果不吊死那位遊客，那麼他說的就不是眞話，所以該被吊死；可是如果那位遊客被吊死，那麼他說的就是實話了，照理不該被吊死。

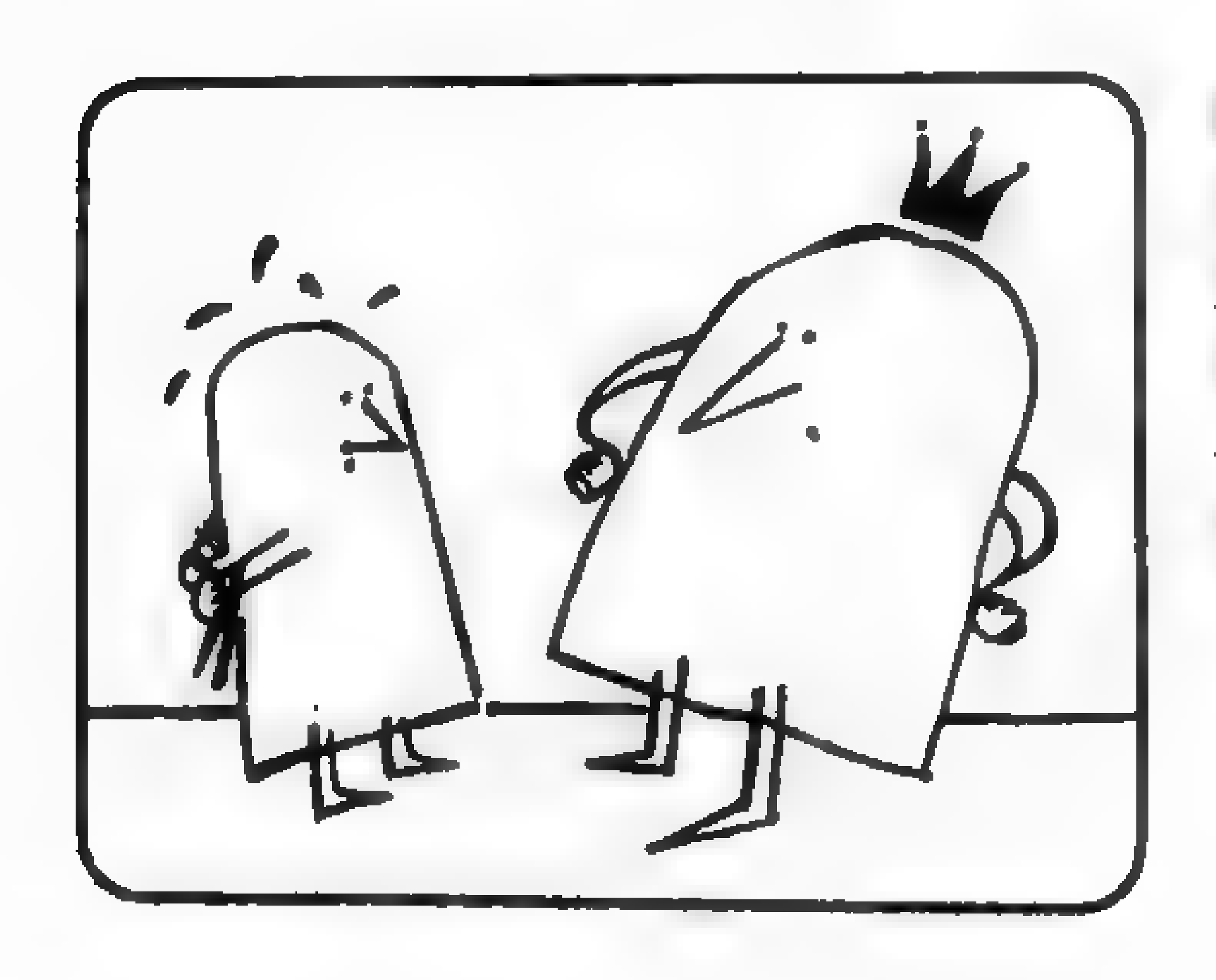


圖3：爲了定奪此案，遊客被帶到小島的國王面前。經過一番深思熟慮之後，國王作出決定。他說：「不論我的裁定是什麼，都一定會違反這條法律，所以我決定大發慈悲，還這位遊客自由。」

這個故事發生在「唐吉訶德傳」一書中的第五十一章，唐吉訶德的僕人桑科(Sancho Panza)就是那位島主，他發誓要維持那條關於遊客的怪異法律。當那位遊客被帶到他面前，他用常識想想後，決定仁慈發落。

這個矛盾雖然和鱷魚的矛盾類似，但是遊客的話本身卻語意不明。遊客到底說的是他的「意圖」，或是指將要發生的事？如果是前者，那麼遊客所說有關意圖的話屬實，所以即使當局不吊死他，也不會牴觸法律。可是如果是後者，那麼無論當局怎麼做都會與法律牴觸。

理髮師矛盾

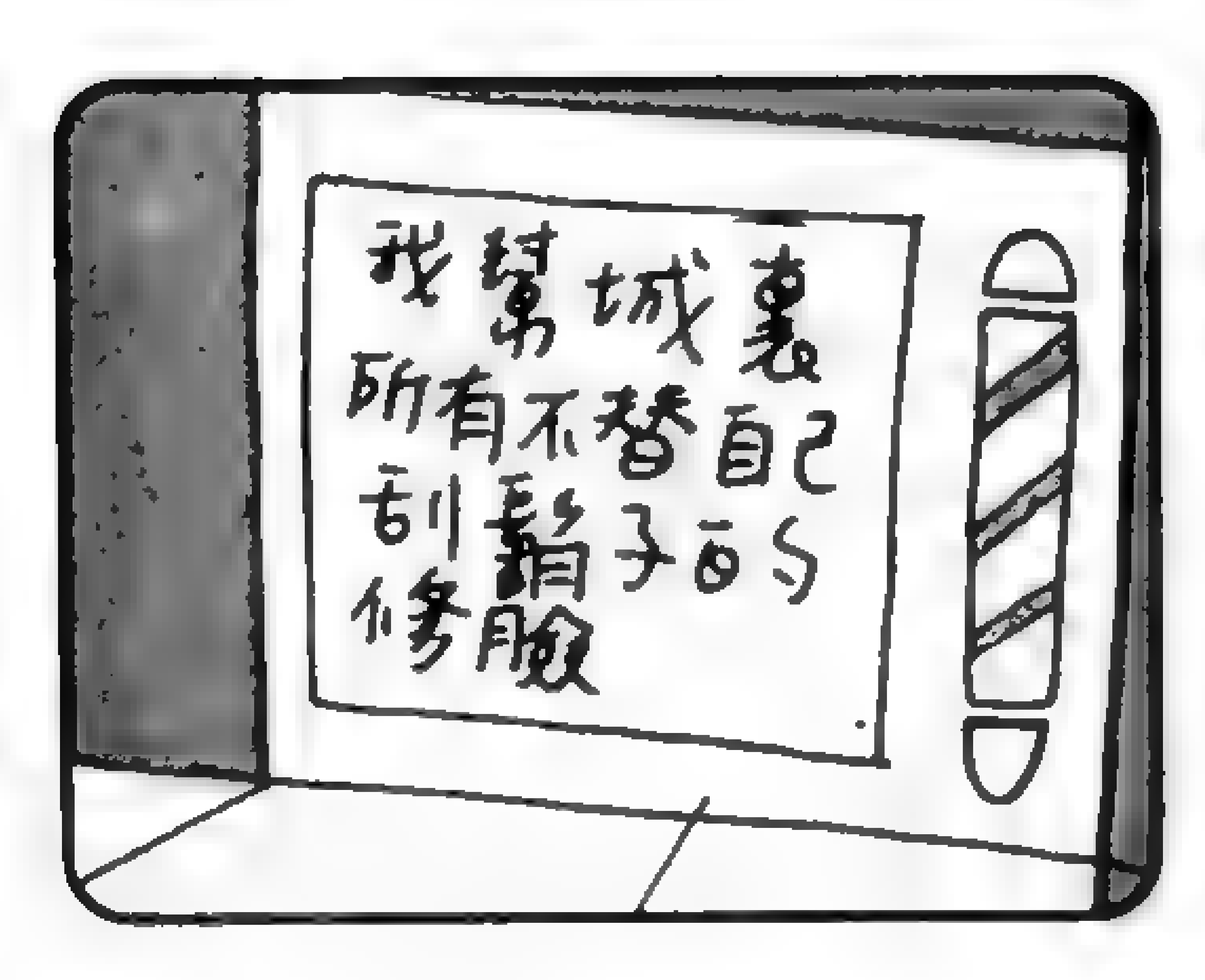


圖 1 ：這個有名的「理髮師矛盾」是由羅素提出的。如果一位理髮師傳在店門口，掛著圖中的牌子，那麼他的鬍子是誰來刮的？

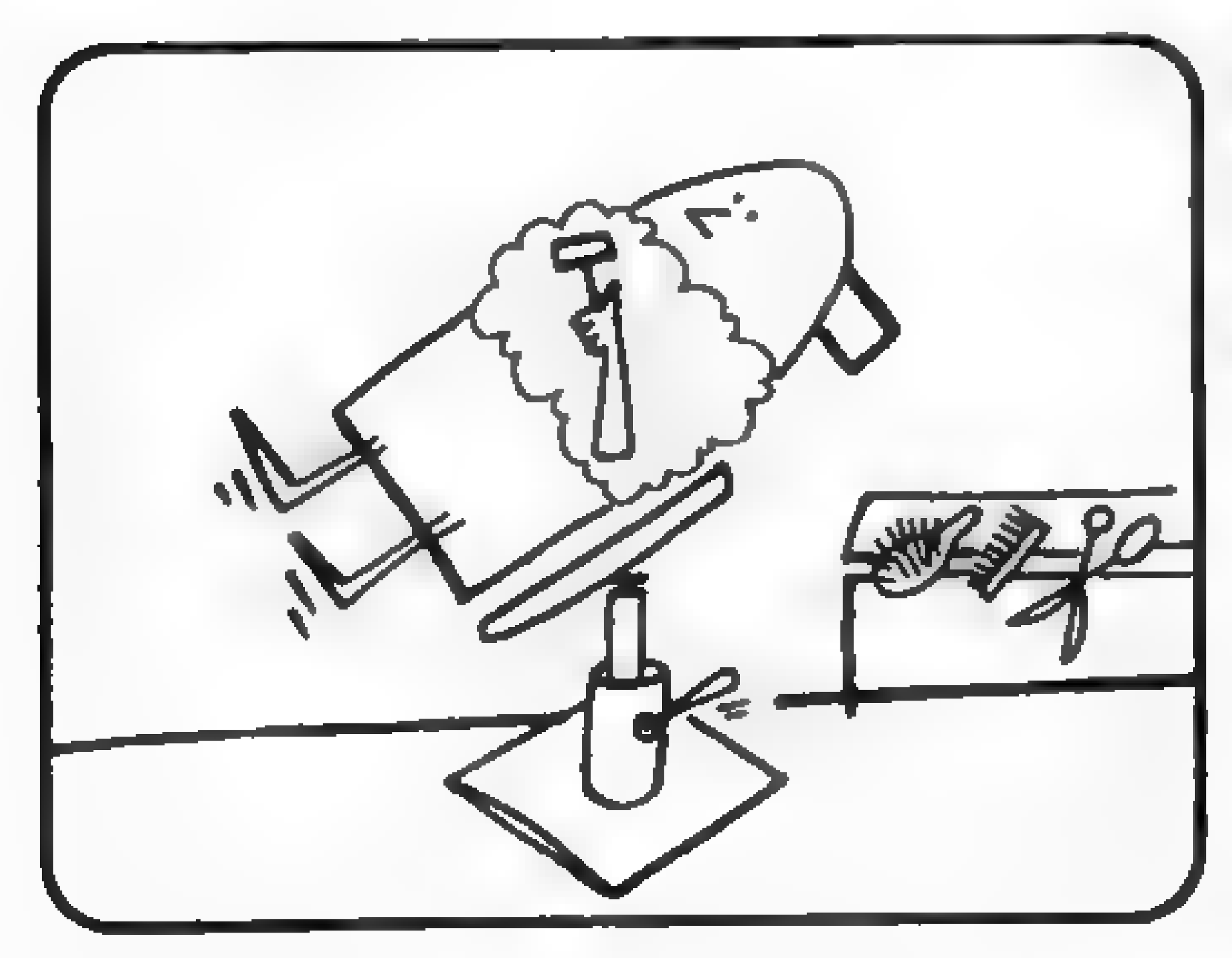


圖 2 ：如果他刮自己的鬍子，那麼他就屬於自己刮鬍子的一羣。依牌子所言，他「從不」幫那一羣自己刮鬍子的人修臉，因此他「不能」幫自己刮鬍子。



圖 3 ：如果別人幫這位理髮師修臉，那麼他就不屬於自己刮鬍子的一羣。可是牌子上說，他幫所有不替自己刮鬍子的人修臉。如此一來，似乎沒有人能幫這位理髮師刮鬍子。

羅素提出這個矛盾來解釋他發現的一個有名的集合矛盾。有些集合的結構是自己屬於自己集合中的元素〔譯按：集合中的個體稱爲份子(member)或元素(element)〕。舉例來說，所有不是蘋果的東西的集合，本身一定不可能是個蘋果；所以它就成爲自己集合中的一個元素。現在仔細想想，有一個集合，它是由「所有不屬於自己集合中元素的集合」所組成的，它會成爲自己集合的一個元素嗎？不論你的答案是什麼，都一定是矛盾的。

接下去我們還會看到一些這類的矛盾，並提出破解的方法。有個跳出困境的方法是，不認定「所有不包含本身的集合所組成的集合」是個集合。更釜底抽薪的方法是堅持集合論中，不允許有任何集合屬於自己集合中的元素。

有趣和無聊

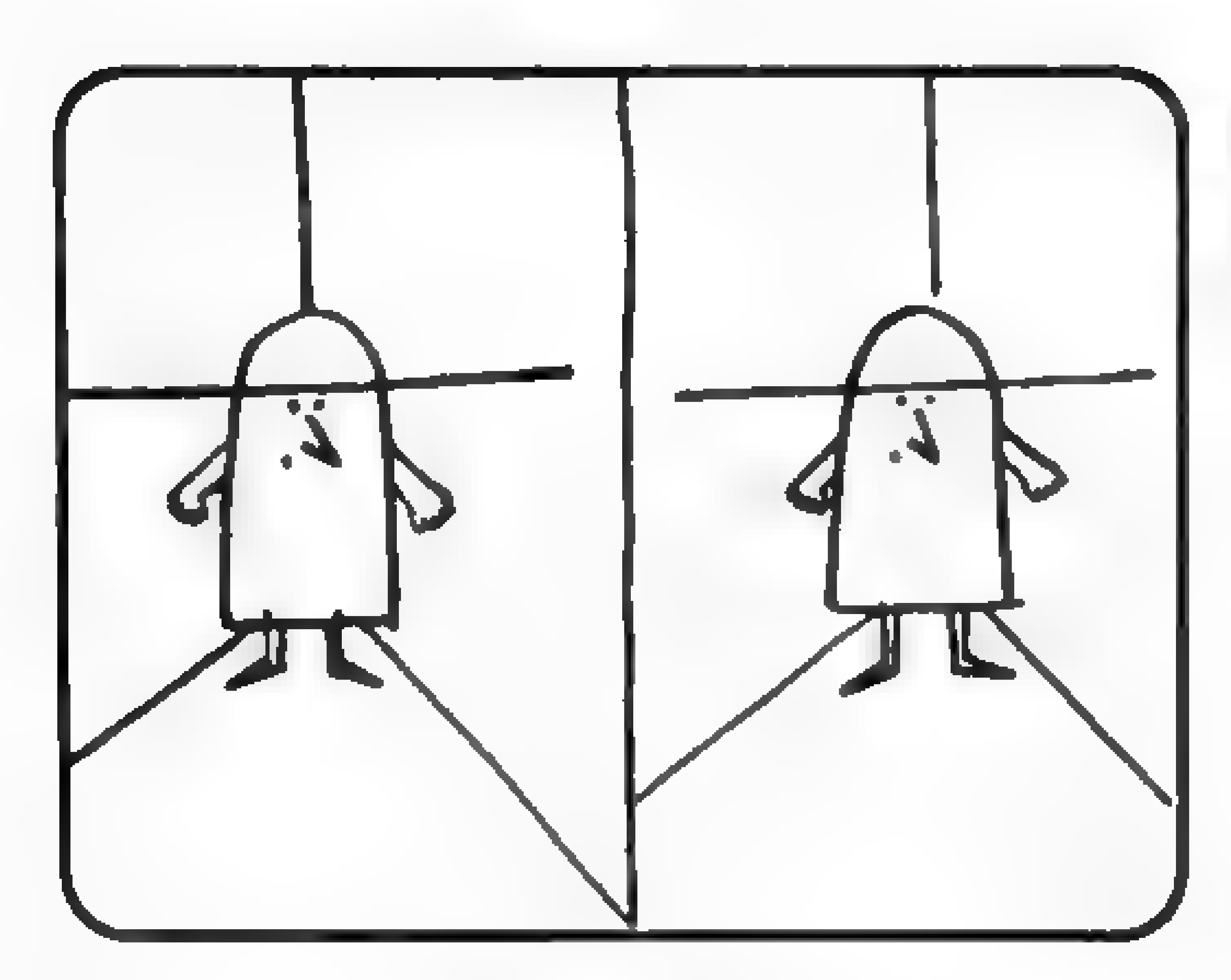


圖1：有些人很有趣，有些人很無聊。

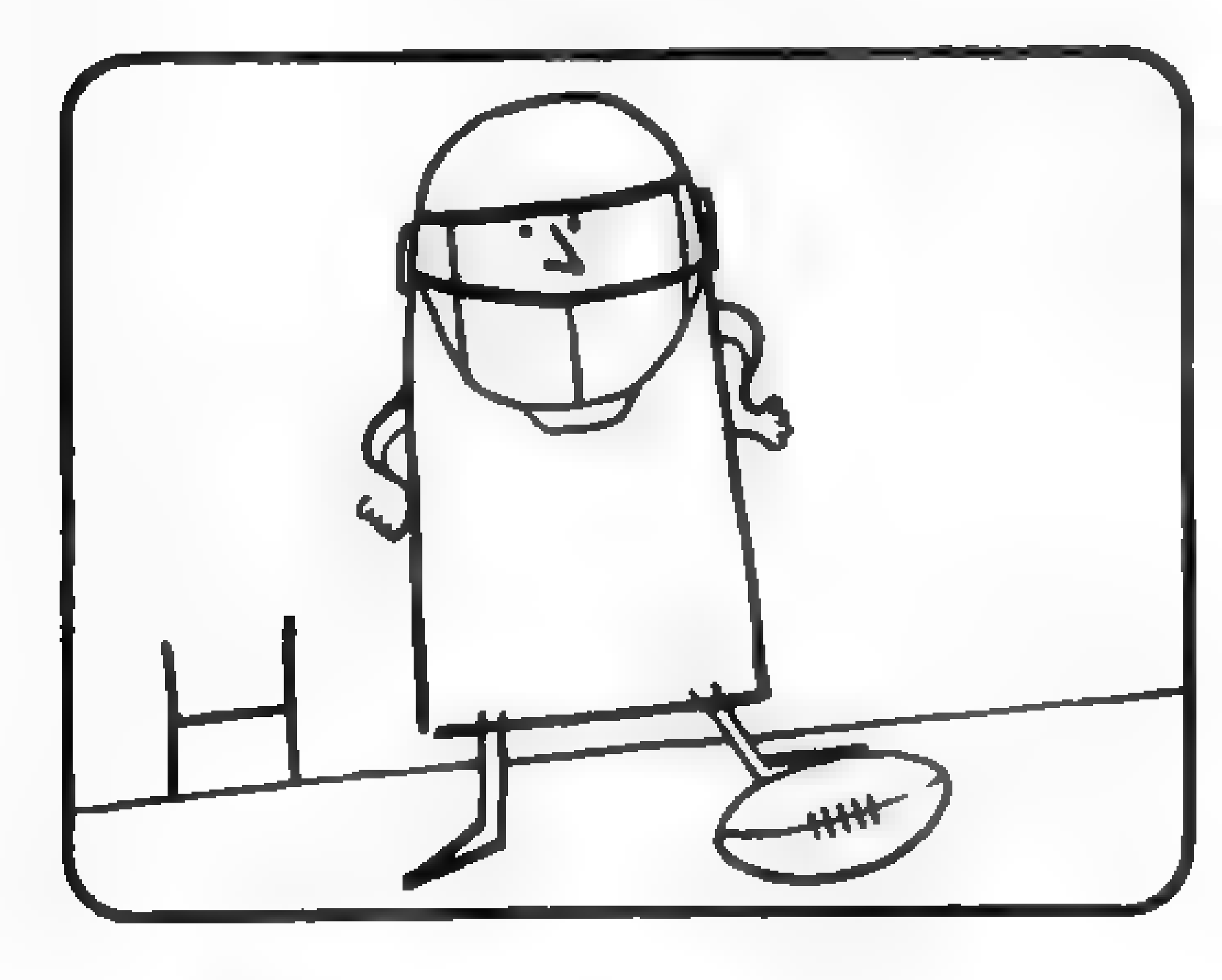


圖2：足球選手：「我是全美最棒的足球明星。」

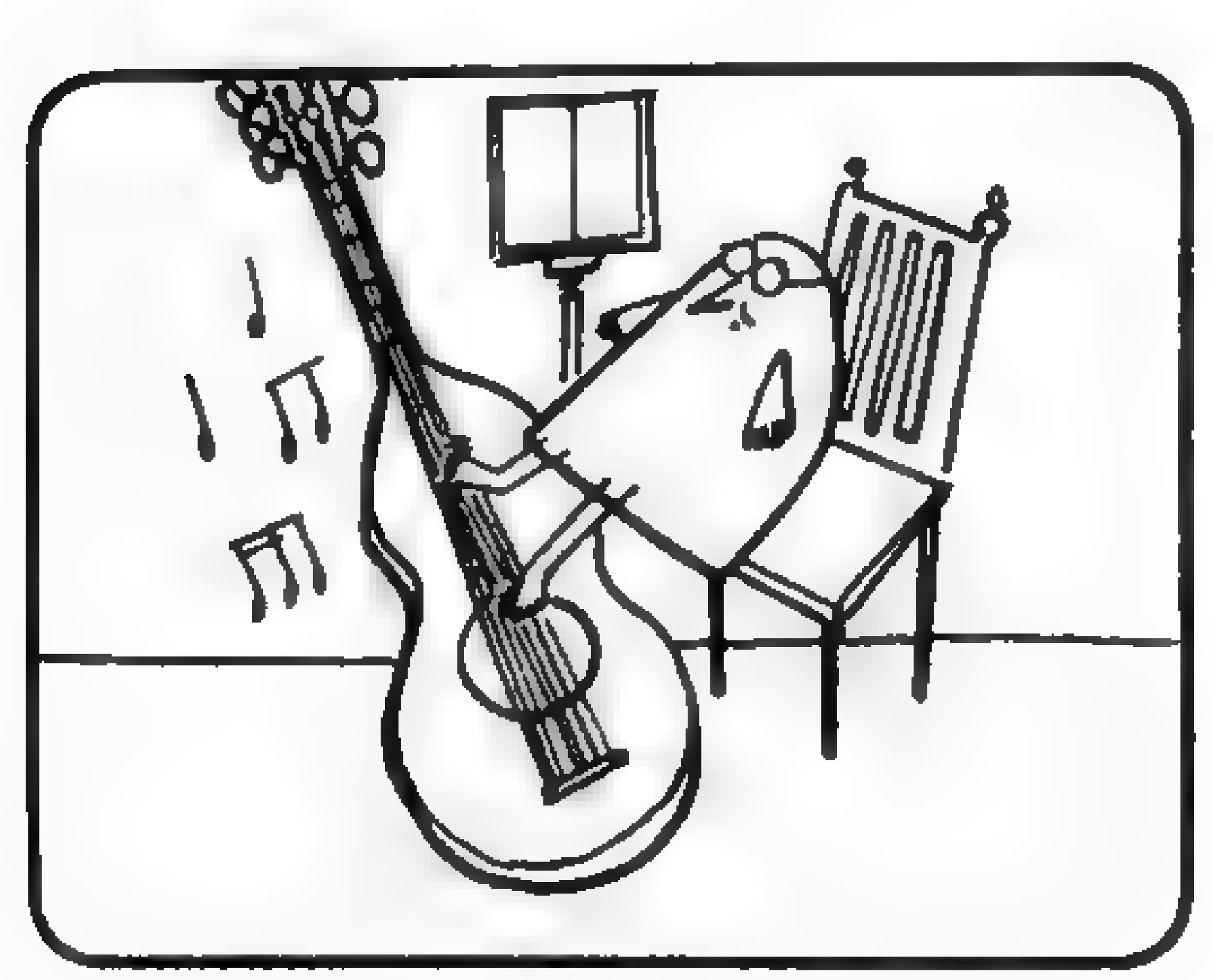


圖3：音樂家：「我會用腳趾彈吉他。」

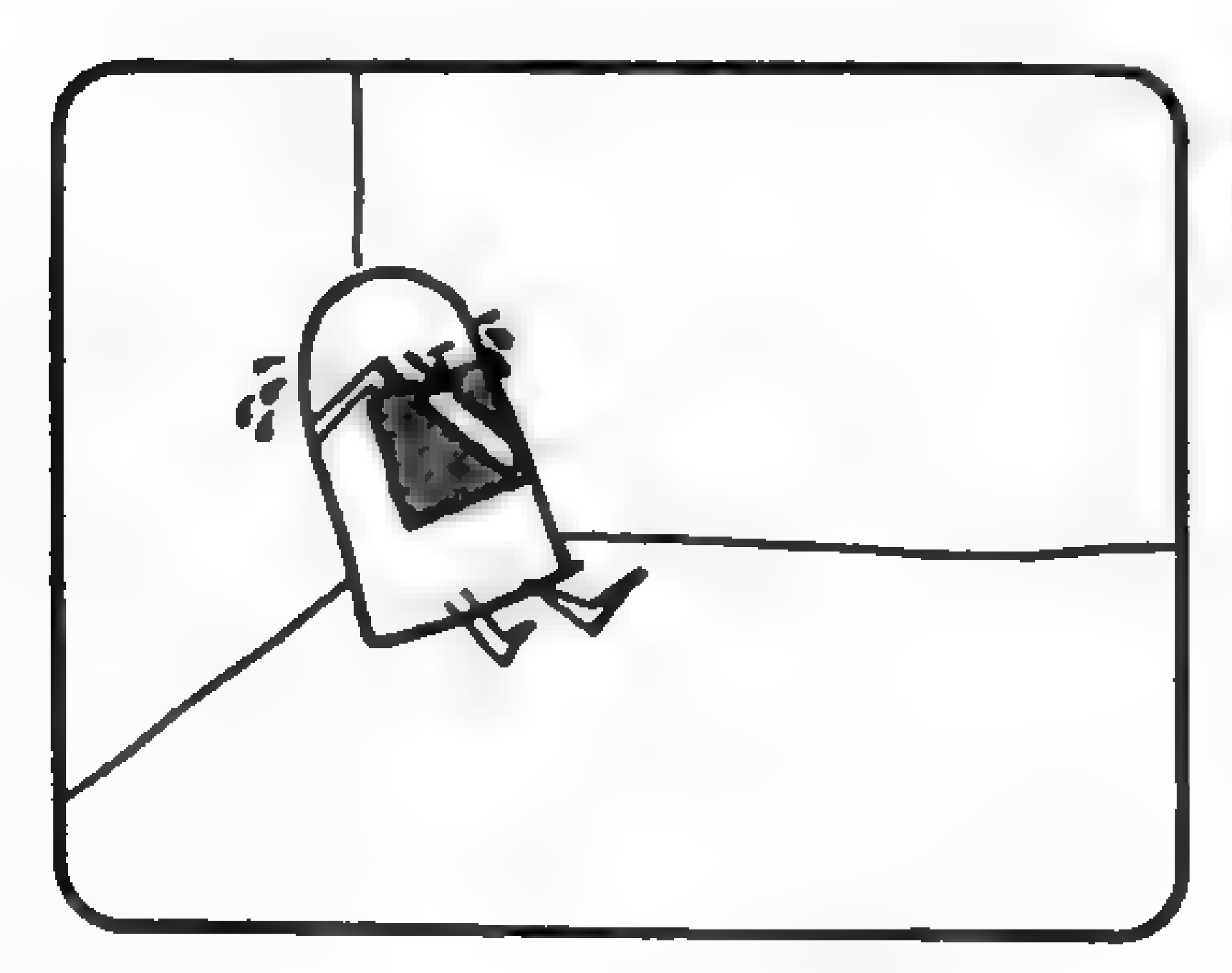


圖4：無聊蛋：「我一無是處，什麼都不會。」

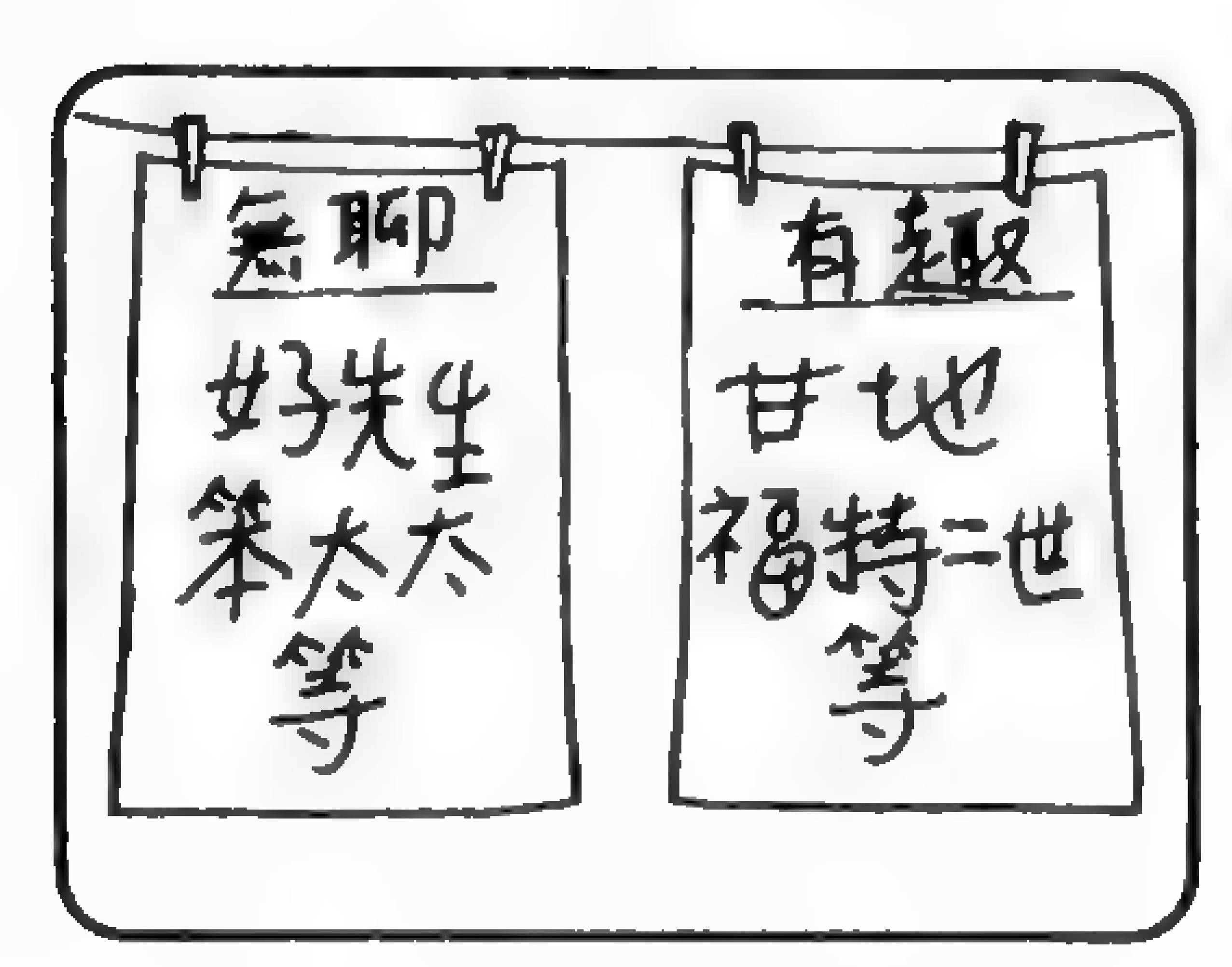


圖5：這裏有兩張名單，一張列出有趣的人，另一張列出無聊蛋。在無聊蛋的名單上，總會有位世上最無趣的無聊蛋。

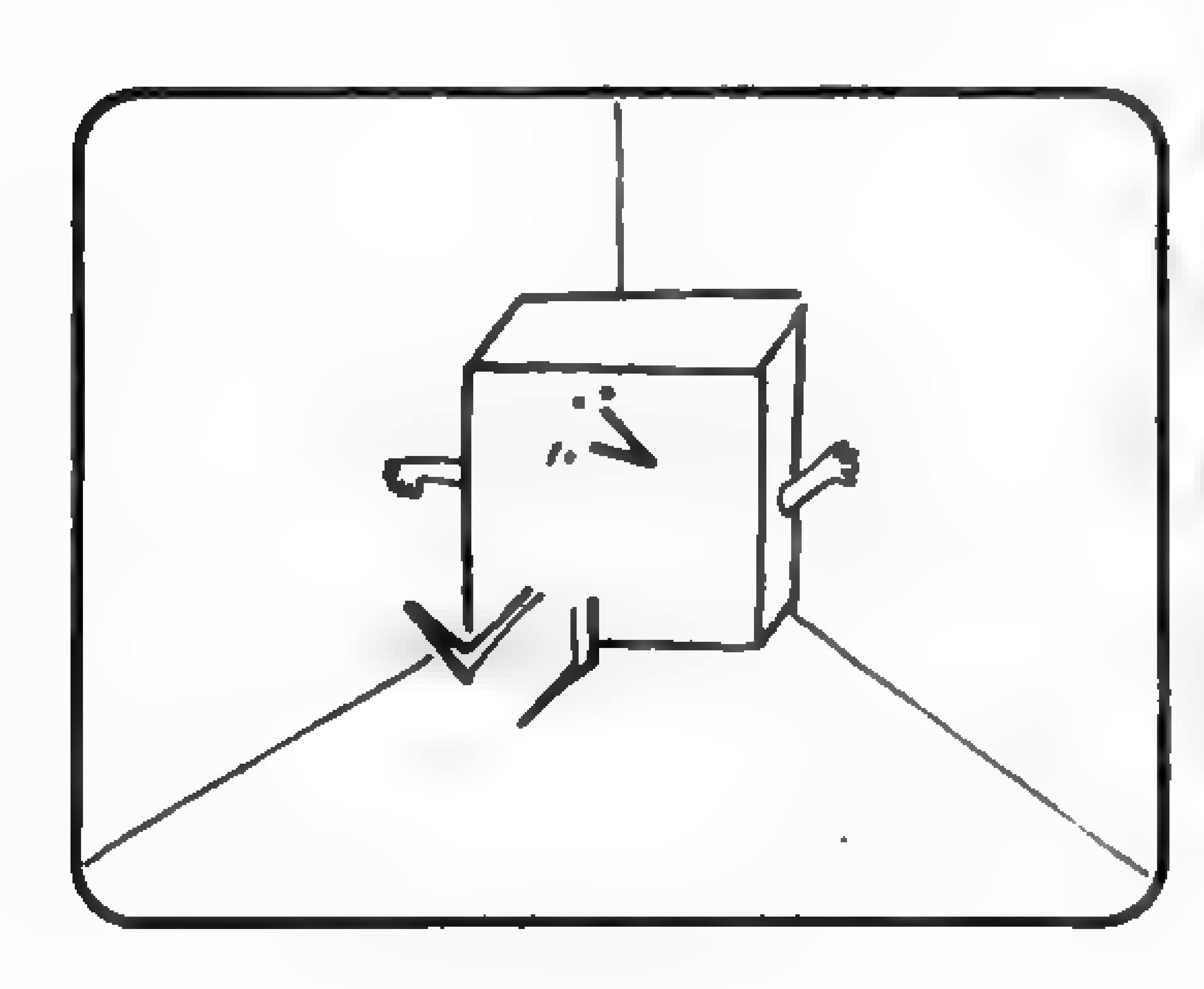


圖6：就因爲他是世上少見的無聊蛋，使得他成爲很鮮的人，因此可以把他移到有趣的人的名單上。無聊蛋：「謝天謝地！」這樣子就會另外出現一位最無聊的人，同理他也會被轉移到有趣者的名單上，最後每個人都會變成有趣的人，這是眞的嗎？

這種說法是正確的還是謬誤的？把第二無聊的人移到有趣者的名單上，是不是就會把原先第一無聊的人擠回無聊蛋的名單上，還是他仍然可以留在有趣者的名單上？結果是不是會變成一個人之所以有趣，是因爲他是某類人（集合）中最無聊的人？又如果所有的人都是有趣的，是不是「有趣」這個形容詞就不再有任何意義了！

先知的預言

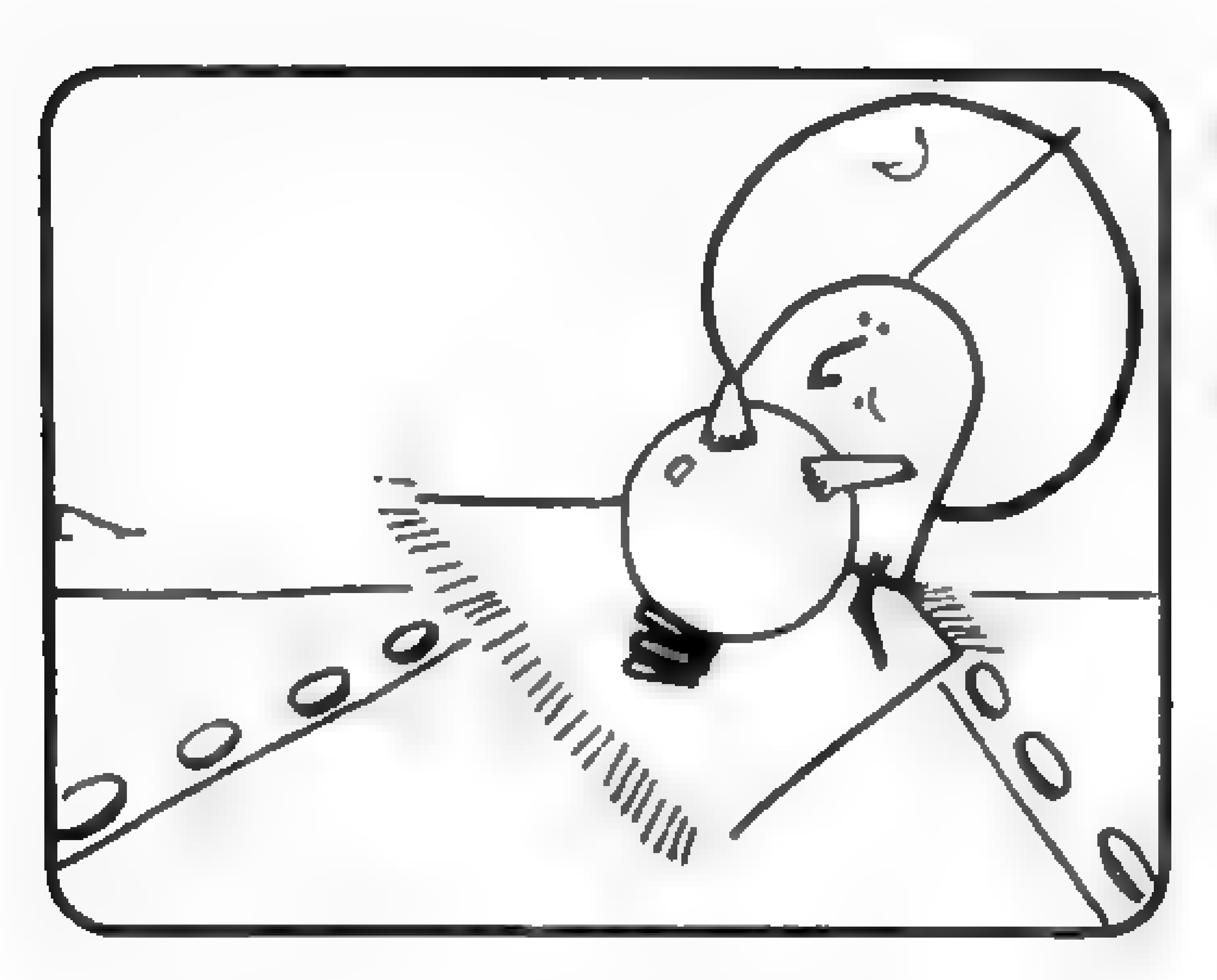


圖 1：先知能從他的水晶球中預知未來？有關未來的預測引發出了邏輯上一種奇特而且新奇的矛盾。

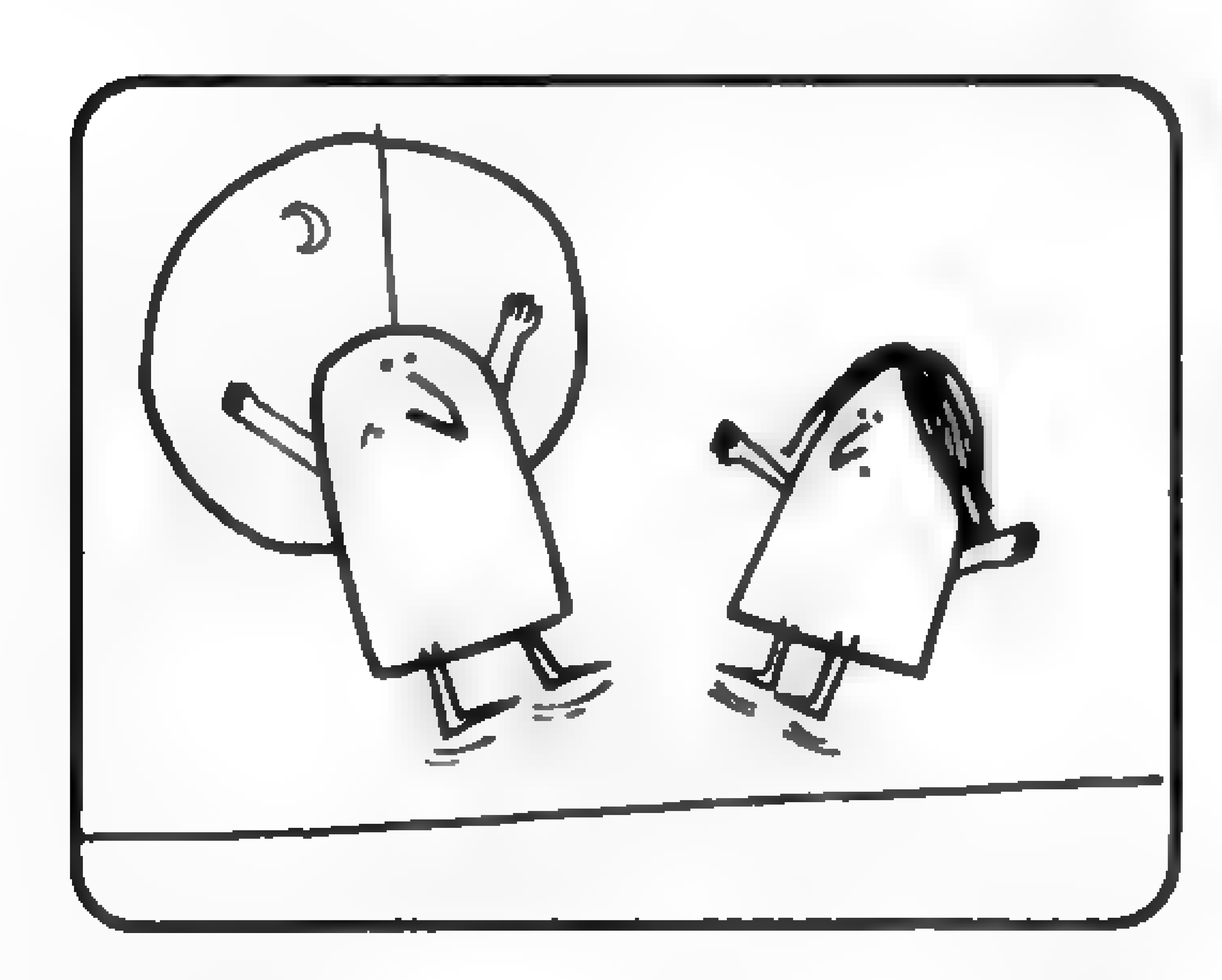


圖 2：有天這位先知和他年輕的女兒蘇，二人起了爭執。蘇：「爸，您眞是個大騙子，您根本不能預知未來。」先知：「我當然可以。」蘇：「不，您不能，並且我能證明您不能。」

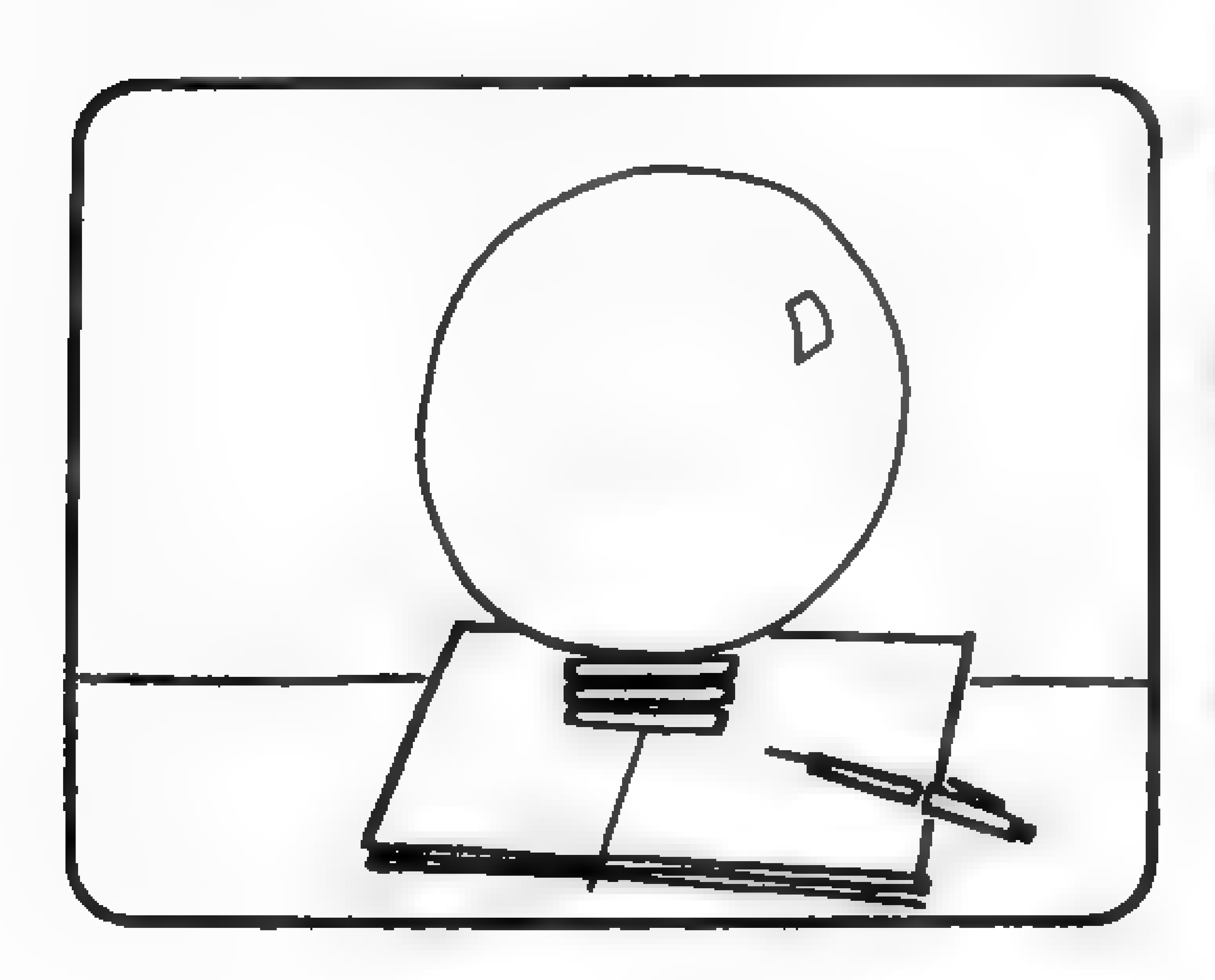


圖 3：蘇在小紙條上寫了些東西，然後把它折起來黏在水晶球上。蘇：「我在紙上寫下了一個事件，在三點鐘以前，它可能會發生，也可能不會發生。您預測一下它會不會發生。如果您猜對了，就不用買車送給我作畢業禮物，雖然您曾經答應過我。」

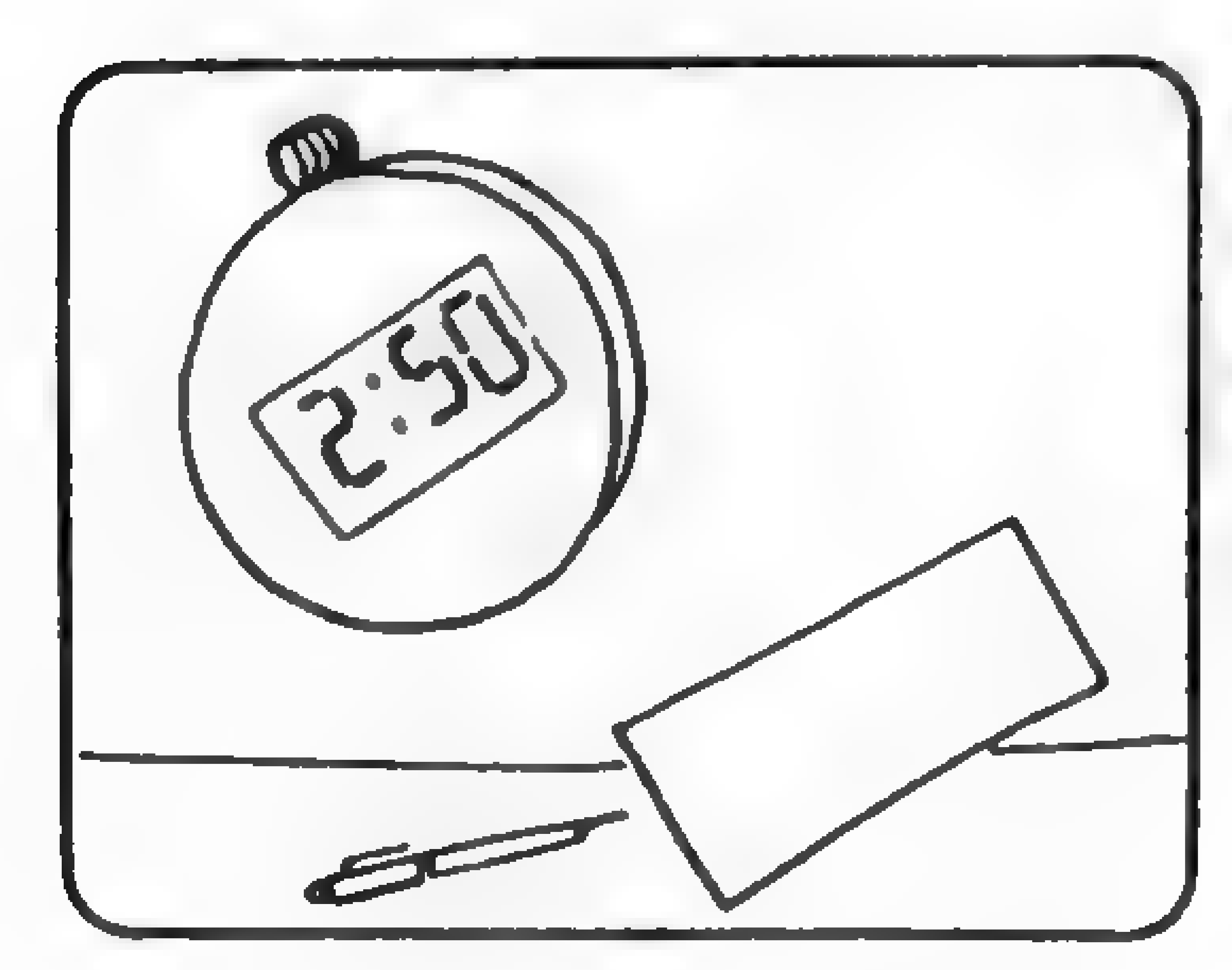


圖4：蘇：「這兒有張白紙，如果您認爲我寫下的事會發生，您就寫個「會」；不然就寫個「不會」。如果您說錯了，您願意不用等我畢業，現在就買車給我嗎？」先知：「好，一言爲定。」

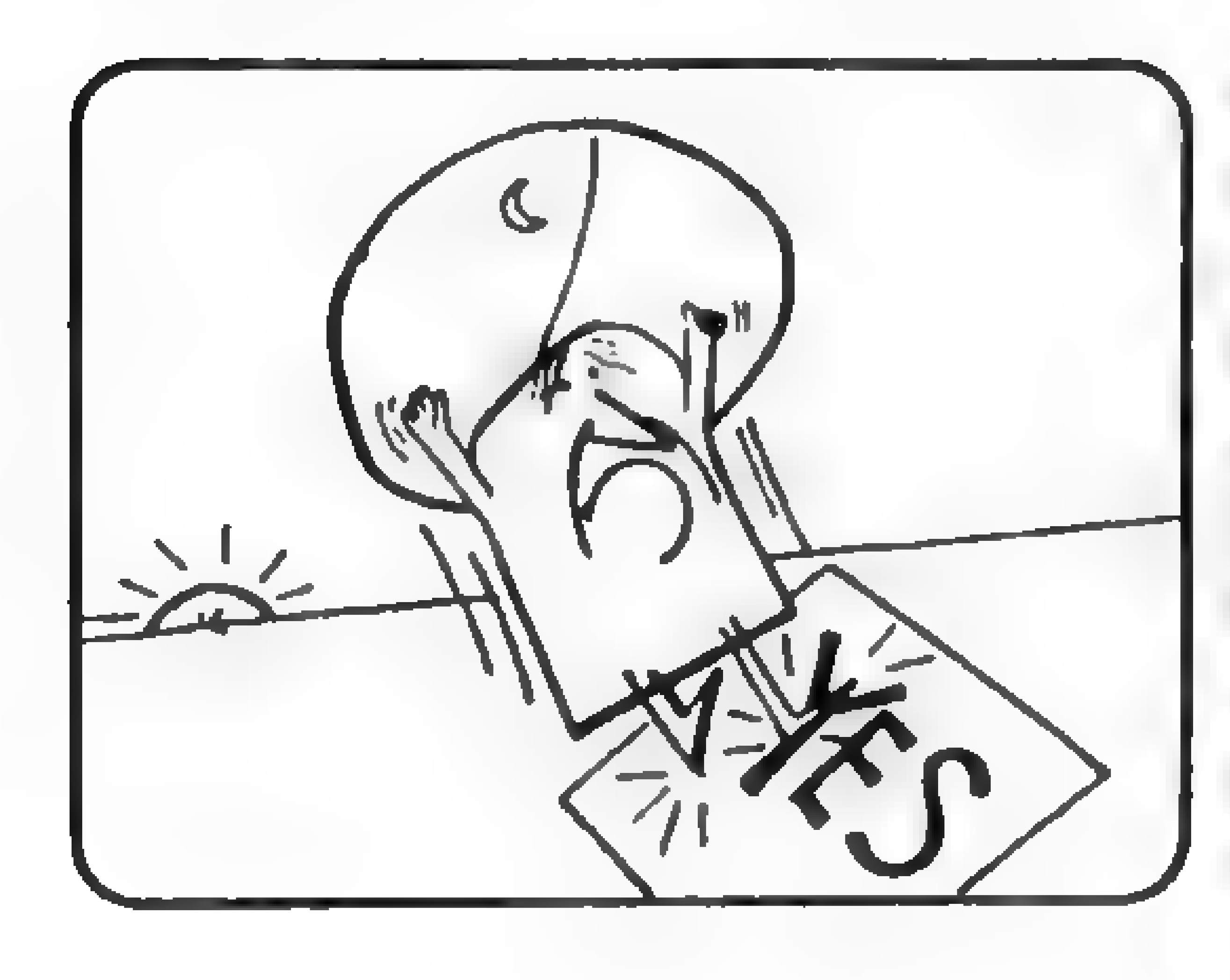


圖5：先知在白紙上寫好答案後，到了三點鐘，蘇把她寫的紙條打開，上頭寫著：「在三點以前，您將在卡片上寫著「不會」。」先知：「你眞的考倒我了。我在紙上寫的是「會」，所以我猜錯了；可是如果我寫的是「不會」，我仍然是錯。我根本沒辦法猜對。」蘇：「老爸，我想要一部紅色跑車，有單人圓背摺椅座位的那種……」

一部只能有「是」或「否」反應的電腦，是這類矛盾的起源。這部電腦被用來預測它本身的下個反應是否爲「否」。很明顯的，在邏輯上，這部電腦不可能有正確的預測。就像是有人問：你下一句要說的是「不」嗎？請回答「是」或「不」。這時你怎麼答都矛盾。

這和「說謊者矛盾」相同嗎？當回答的人說「不」時，這個「不」代表什麼意義？很清楚地，這個「不」代表著「此刻我說『這是假的』時，是假的。」這個意義和「這句話是假的」一樣。由此看來，先知預言的矛盾比說謊者矛盾藏有更多陷阱。

值得注意的是，若光是用「這句話是眞的」的述句，並不會導出矛盾；用「你下一句要說的是『是』嗎？」這句話，不論是回答「是」或「否」也都不會有問題。就像在鱷魚的故事中，如果那位母親回答的是「你會把孩子還給我」，那就不會有矛盾了。

出乎意料的老虎

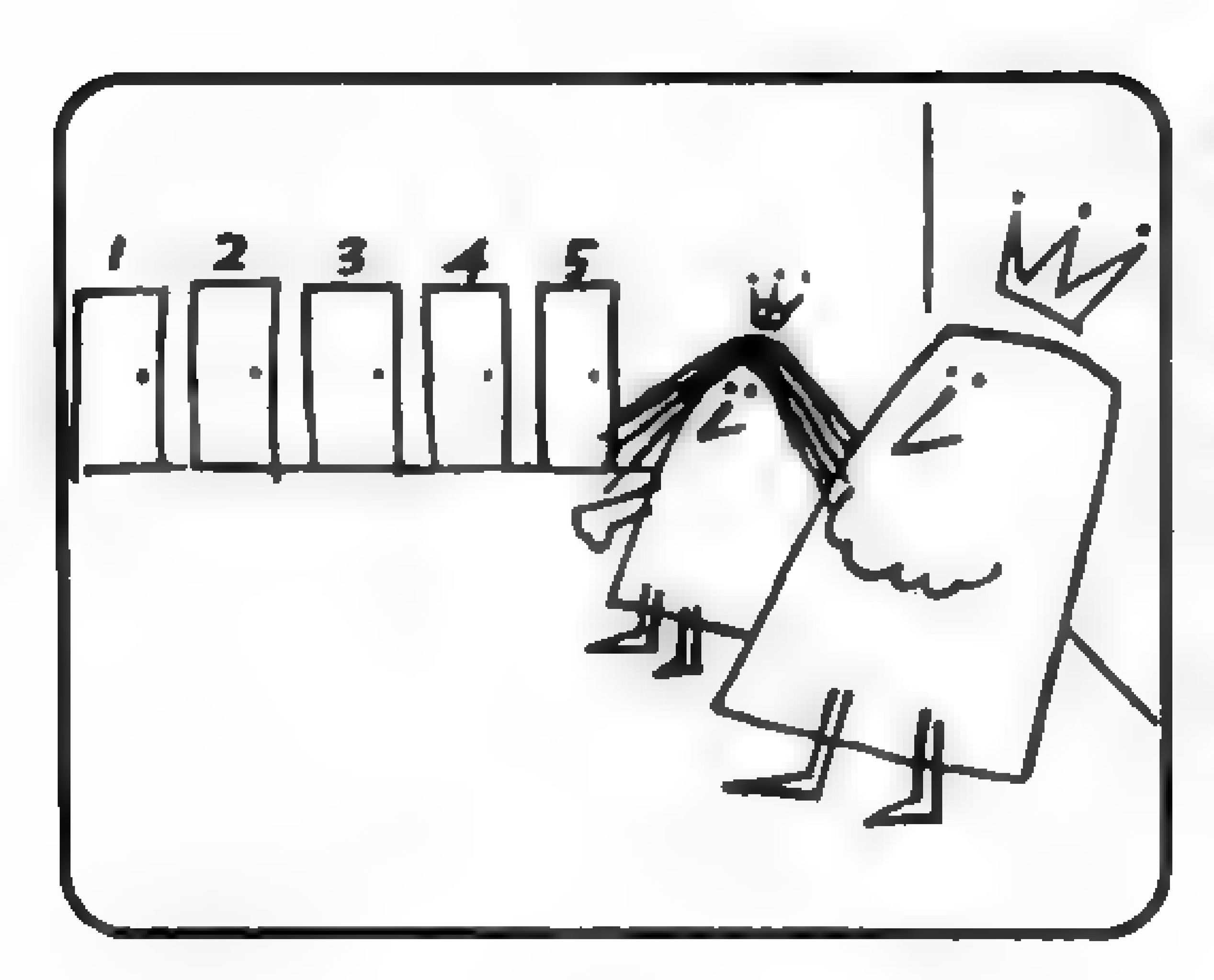


圖1：公主：「父親，您是一國之君，請問我可以和麥克結婚嗎?」國王：「親愛的女兒，如果麥克殺了躲在這五扇門後面的老虎，你們就可以結婚。麥克不知老虎藏在哪一扇門內，必須從第一扇開始，依序開門，直到老虎出現爲止。」

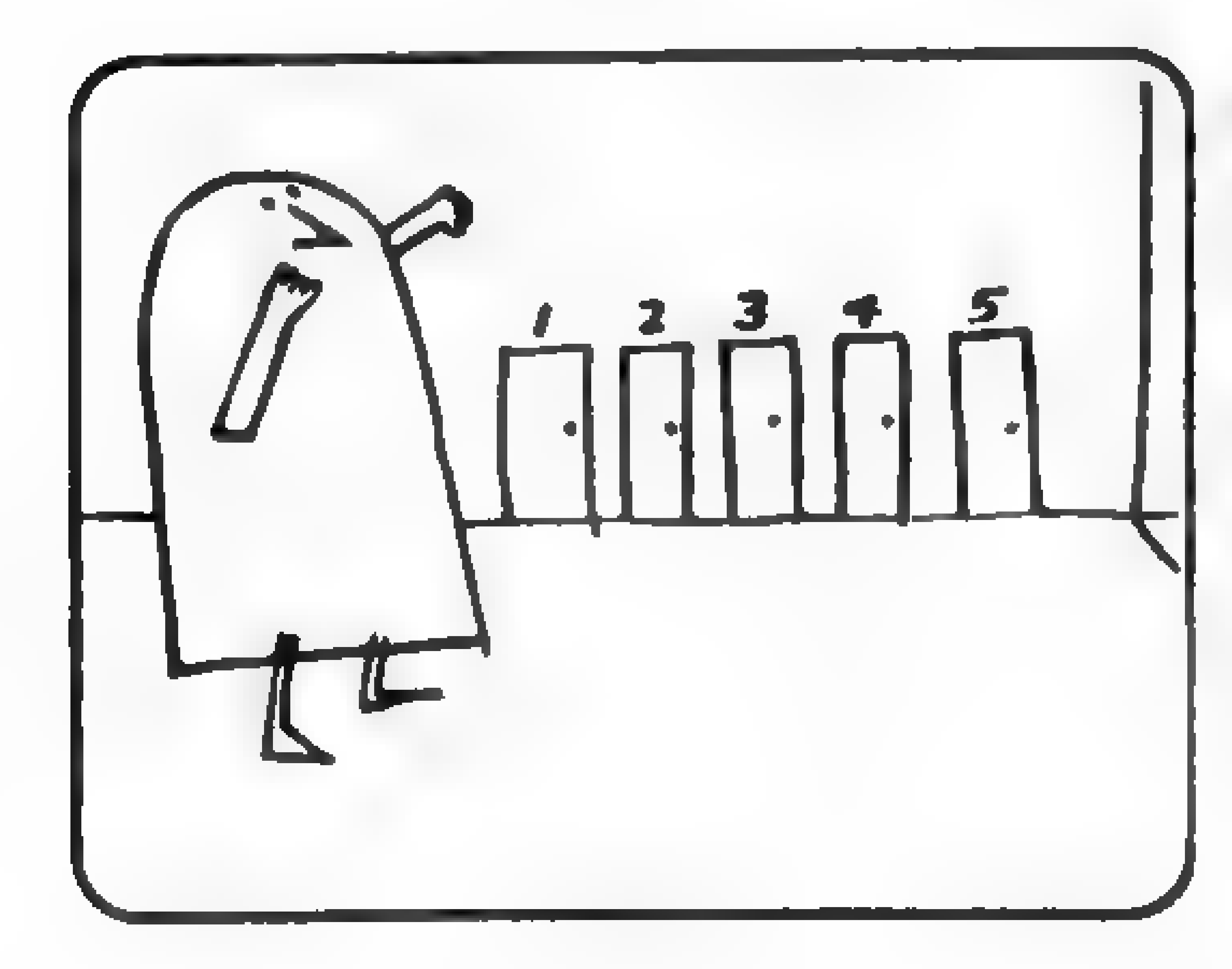


圖2：麥克看到這五扇門時，自忖道：「如果我接連打開了四扇門都是空的，那麼老虎一定是在第五扇門後面，可是國王說我不可能預先得知老虎躲在哪扇門後，所以老虎一定不在第五扇門後。」

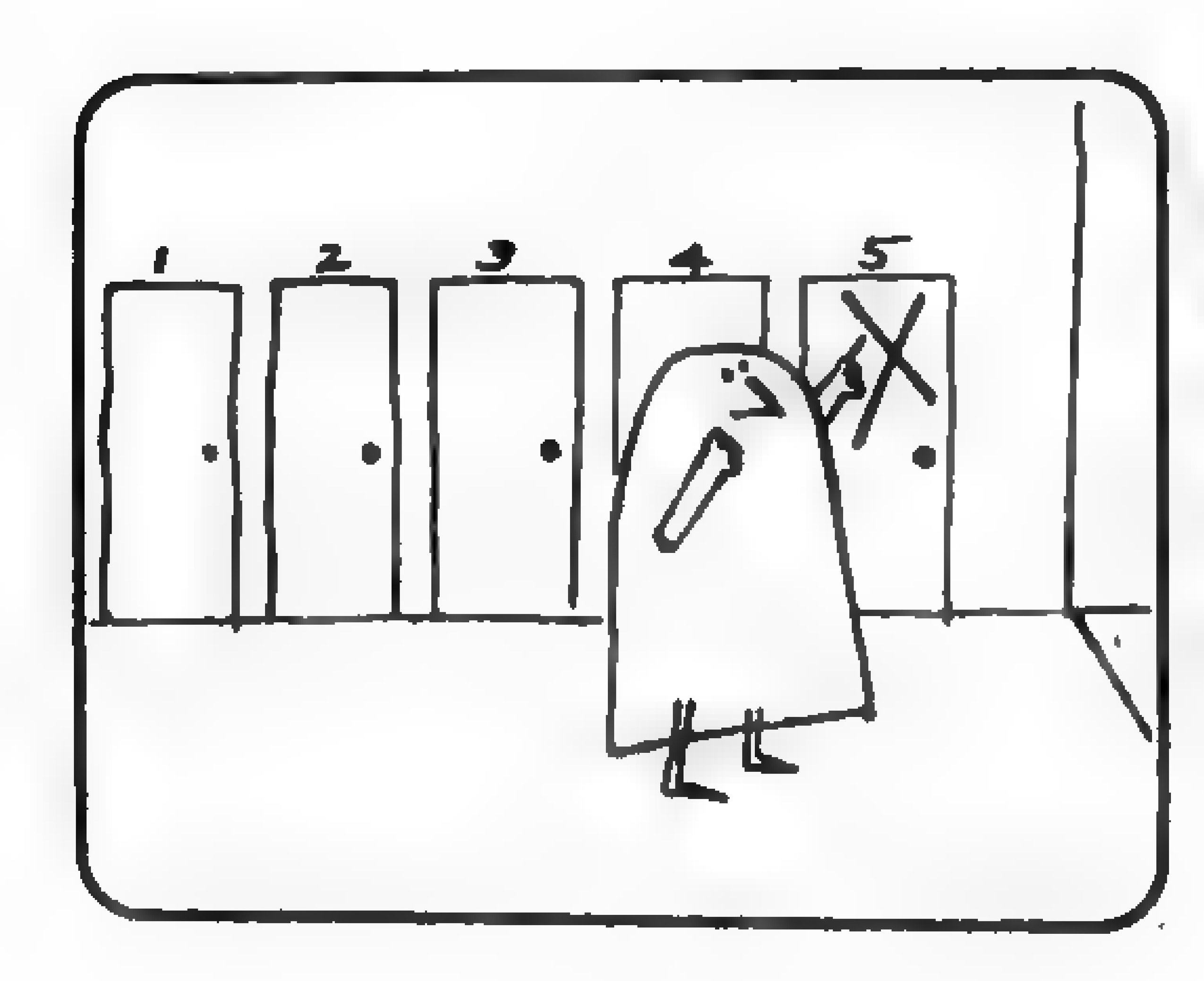


圖3：麥克：「那麼就只剩下四扇門了。可是同樣的，如果我連續打開了三扇門都是空的，那麼老虎一定是在第四扇門中，可是這樣一來，我又能預知老虎在那兒，所以老虎一定不在第四扇門後。」

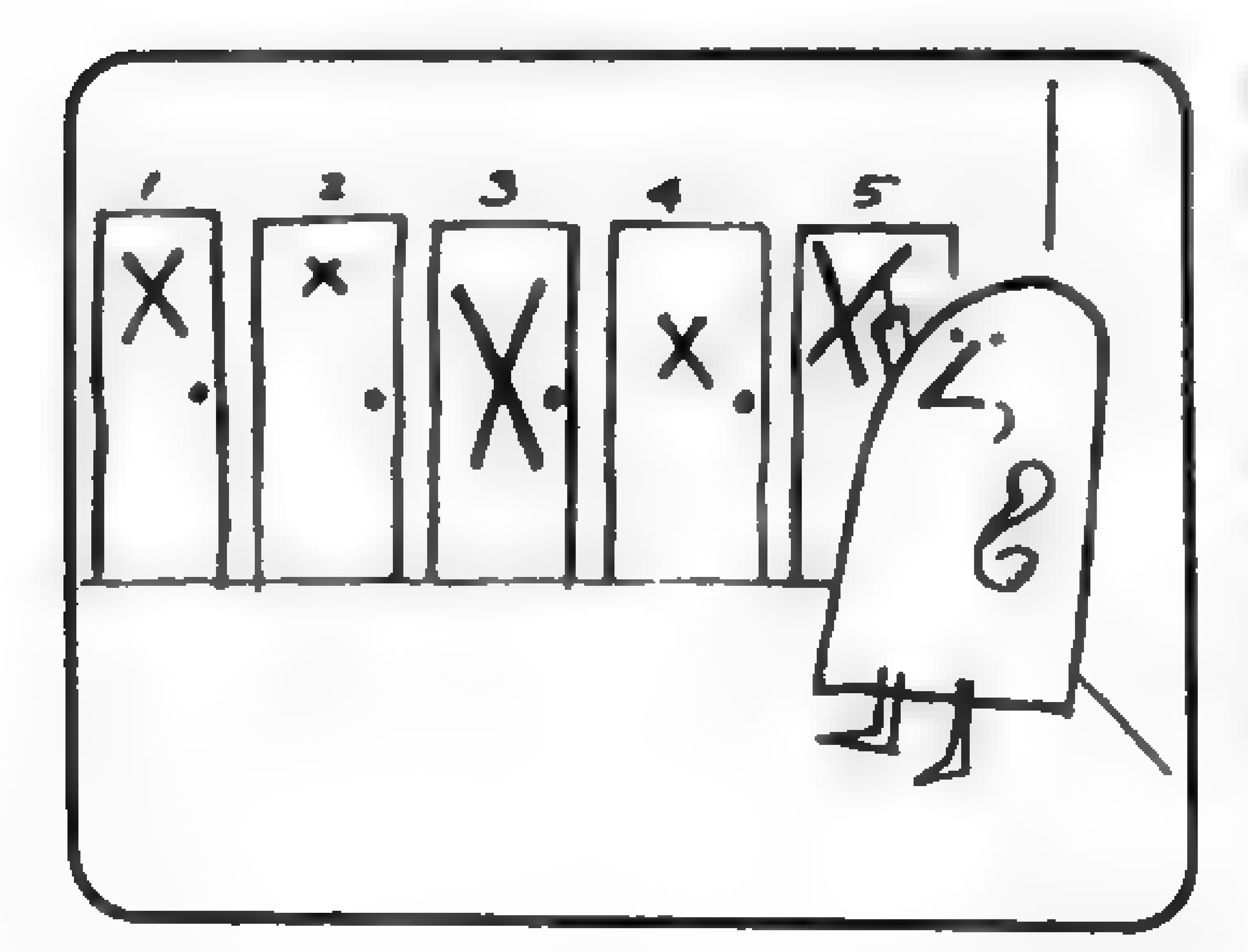


圖4：依照相同的推理，麥克認爲老虎也不會在第三、第二或第一扇門中。麥克好高興，他想：「原來根本就沒有老虎躲在門後。如果有老虎，也不像國王說的是無法預料的。而國王說話又是一言九鼎，所以唯一的可能是沒有老虎。」

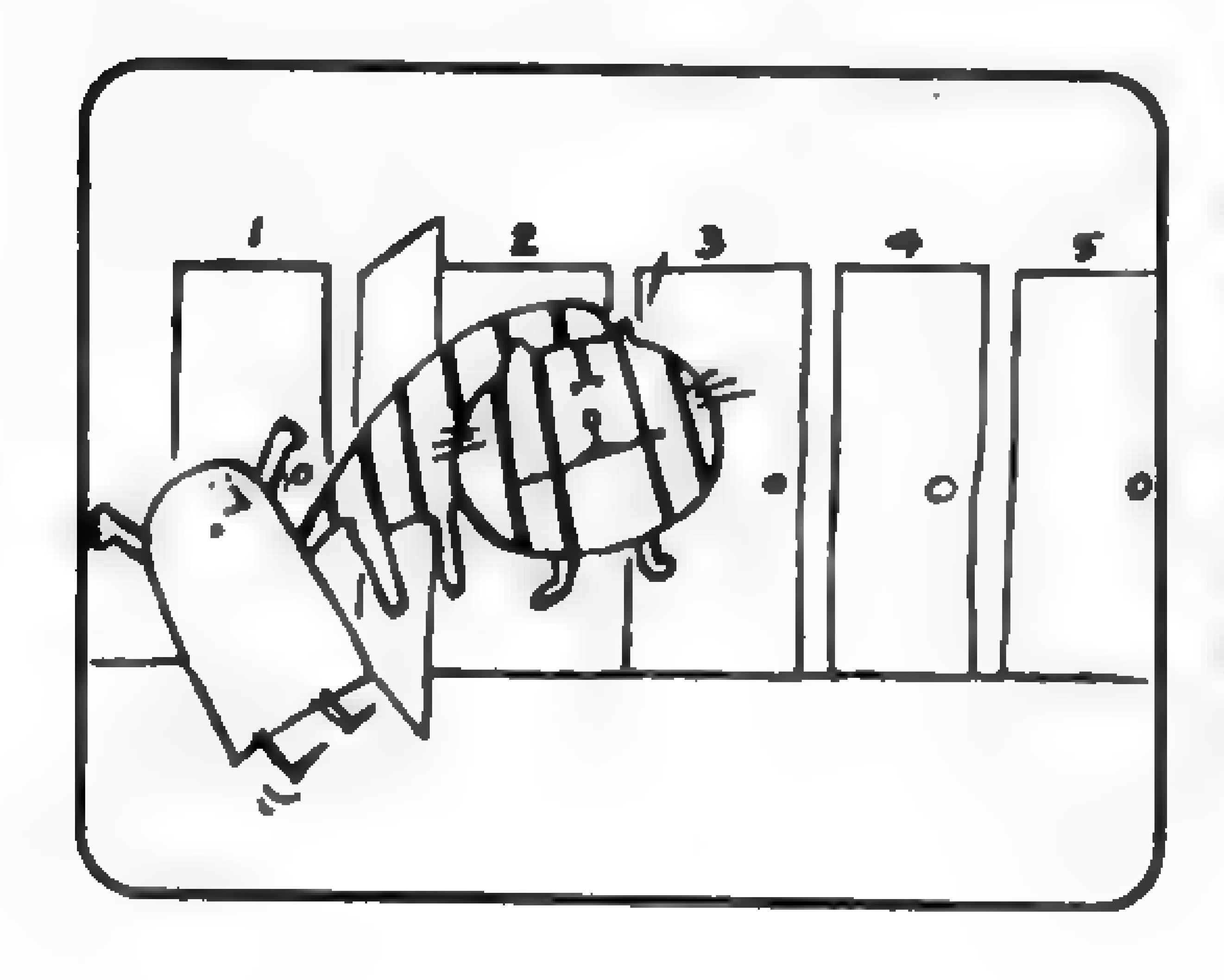


圖5：既然沒有老虎，麥克就有恃無恐啦，於是大膽開門。沒想到大出他所料，老虎從第二扇門中一躍而出。正如國王所言，老虎在哪兒是無法預知的。不過麥克的推理過程到底哪裏出了差錯，到目前爲止，邏輯學家仍沒有一致的說法。

很多故事都屬於這類矛盾，可是起源於何時已不可考，目前所知最早的一個出現在一九四〇年代初期，有位教授宣佈：「在下個星期中的某一天，將會有個臨時抽考。」他並且向學生保證，除非到考試的那一刻，絕對沒人能推算出考試的日子。於是乎有位學生就用麥克的方法證明出：不可能是下星期的最後一天，也不是倒數第二天，如此一直推完整個星期。雖然他如此推演，這位教授仍然實現了他所說的話，在星期三舉行了臨時抽考。

很多人都認爲麥克推理的第一步是正確的，也就是說老虎不可能在最後一扇門內。只要認定這步演繹是對的，似乎就可運用相同的道理推論下去：老虎也不會在倒數第二扇門內，或在倒數第三扇門內……。

其實麥克推理的第一步就是錯的。假設他除了最後一扇門外，打開了所有前面的門，他就能胸有成竹的推論出最後一扇門內沒有老虎嗎？不能，因爲如果他做出這樣的推論，他打開最後一扇門時，就會出乎意料地發現一隻老虎。即使在這個故事中，只有一扇門，這整個矛盾還是存在。

假設老實先生（你知道他總是說實話的）交給你一個盒子，說：「打開盒子，你會發現一枚出乎意料的蛋。」這時你如何推演出盒內到底有沒有蛋？如果老實先生說的沒錯，盒子裏眞的有枚蛋，這樣你就能「預料」到盒裏有蛋，如此一來老實先生說這是一枚「出乎意料的蛋」就是假的。換句話說，如果你考慮到這層矛盾，因而推演出這個盒內不會有蛋（在此情況下，老實先生說的話是假的）；可是當你打開盒子，居然發現一枚出乎意料的蛋，這時老實先生說的就是眞的了。

邏輯學家都同意，雖然國王自已知道他的話會實現，可是麥克卻沒辦法得知這點，因此他推演出老虎不在任何一扇門後（包括最後一扇門），是不合理的（亦即無效的）。

紐康矛盾

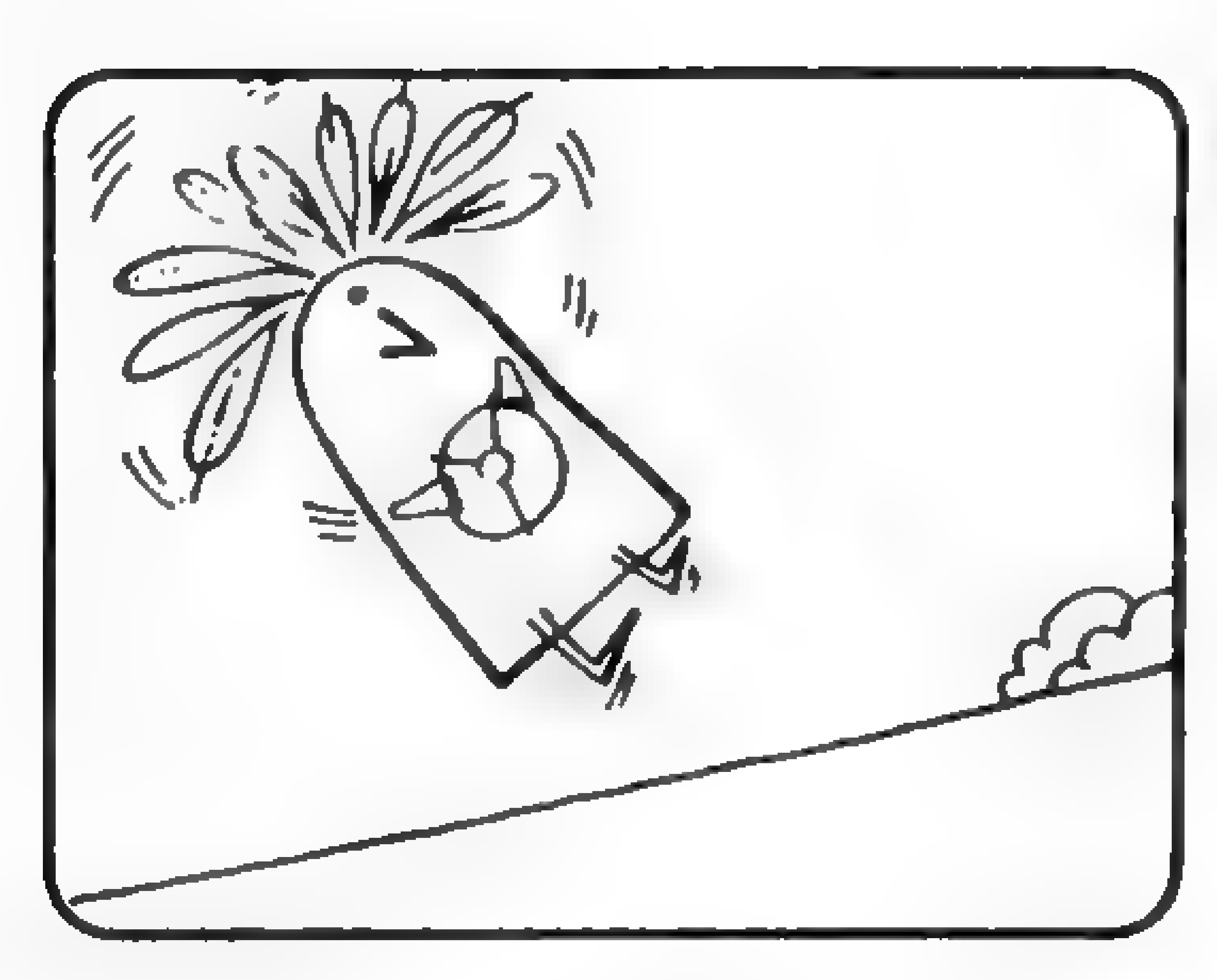


圖 1：有天，一位外太空來的超人類—亞米茄—登陸地球。

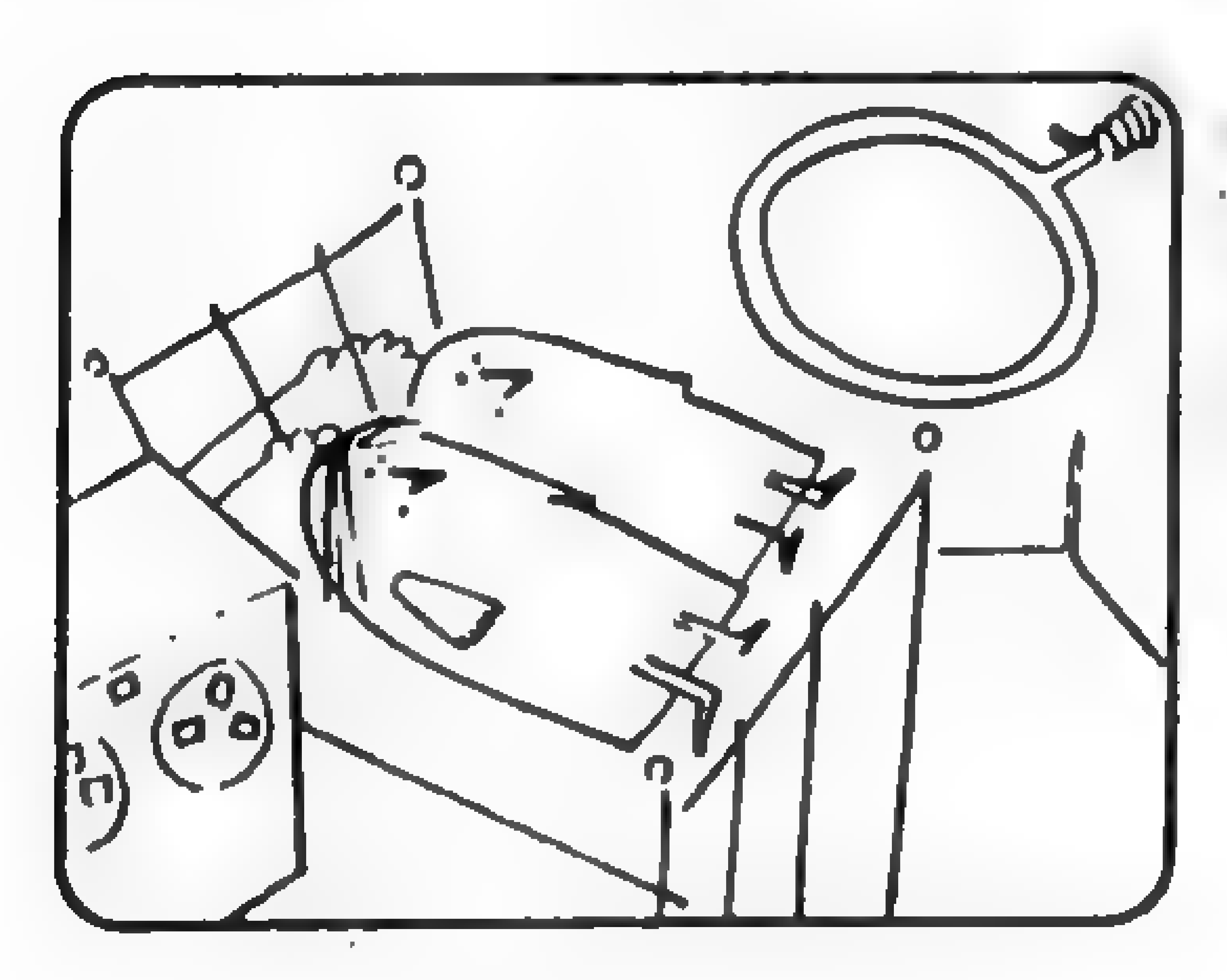


圖 2：亞米茄擁有研究人腦的先進儀器，能夠準確地預測出一個人面對兩項選擇時，將作出什麼決定。

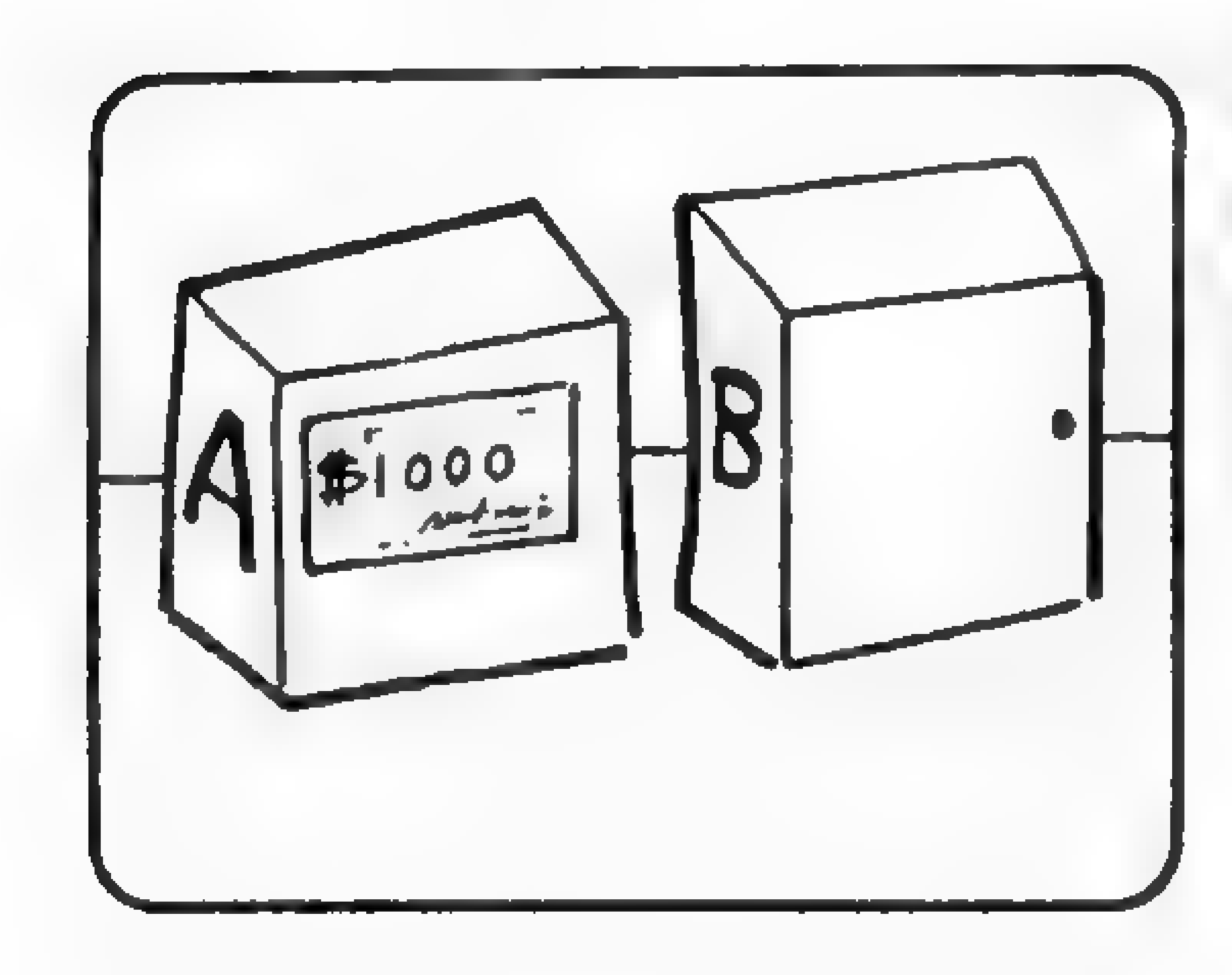


圖 3：亞米茄用兩個大箱子來測試很多人：A 箱是透明的，裏頭總是放張千元大鈔；而 B 箱則是不透明的，裏頭可能空無一物，也可能放著一百萬元。

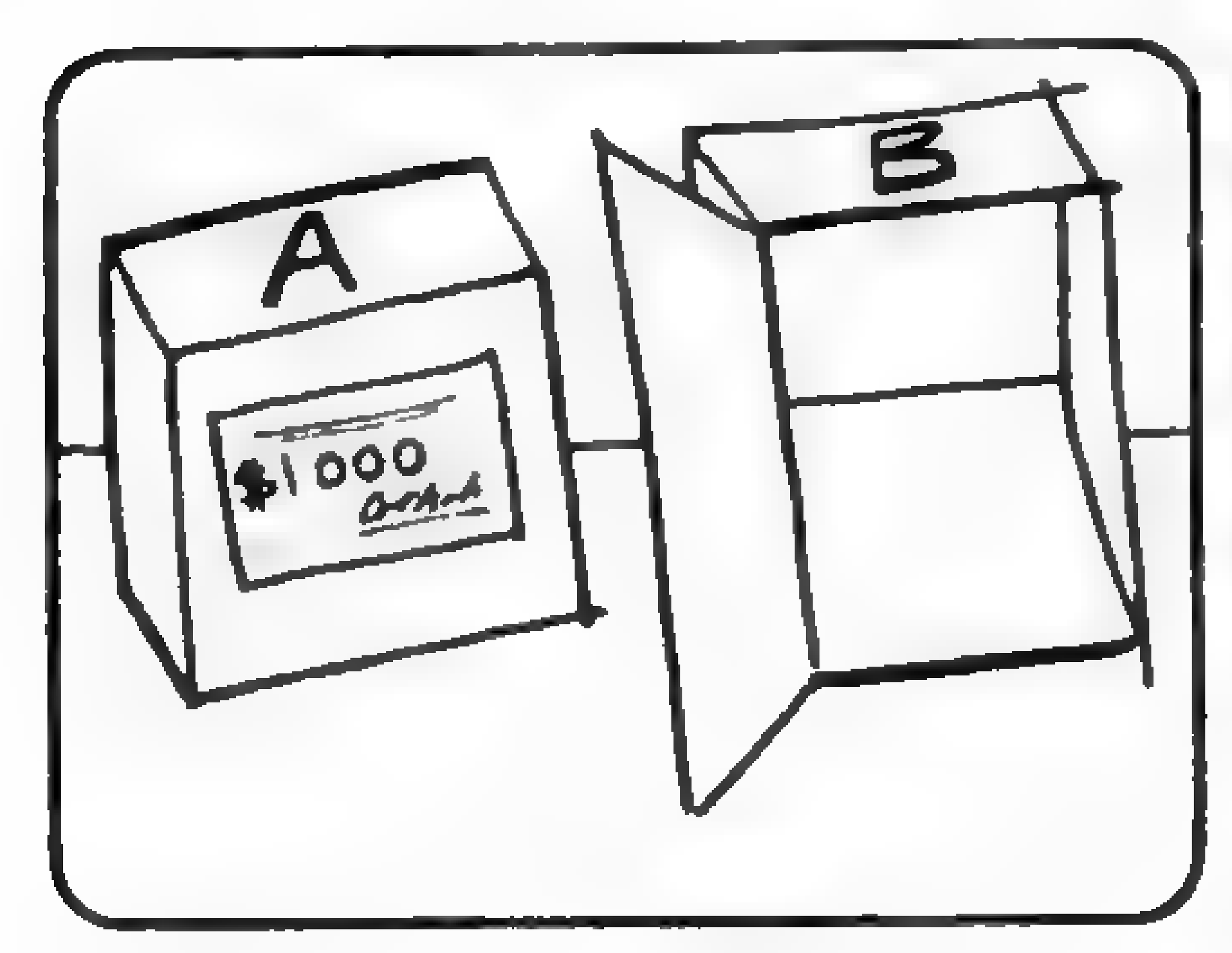


圖 4：亞米茄告訴每一位測試者：「你有兩個選擇，一個是同時拿走兩個箱子，箱子裏的東西就全是你的。可是如果我猜到你會這麼做的話，我就會讓 B 箱空無一物，所以你總共只能拿到一千元。」

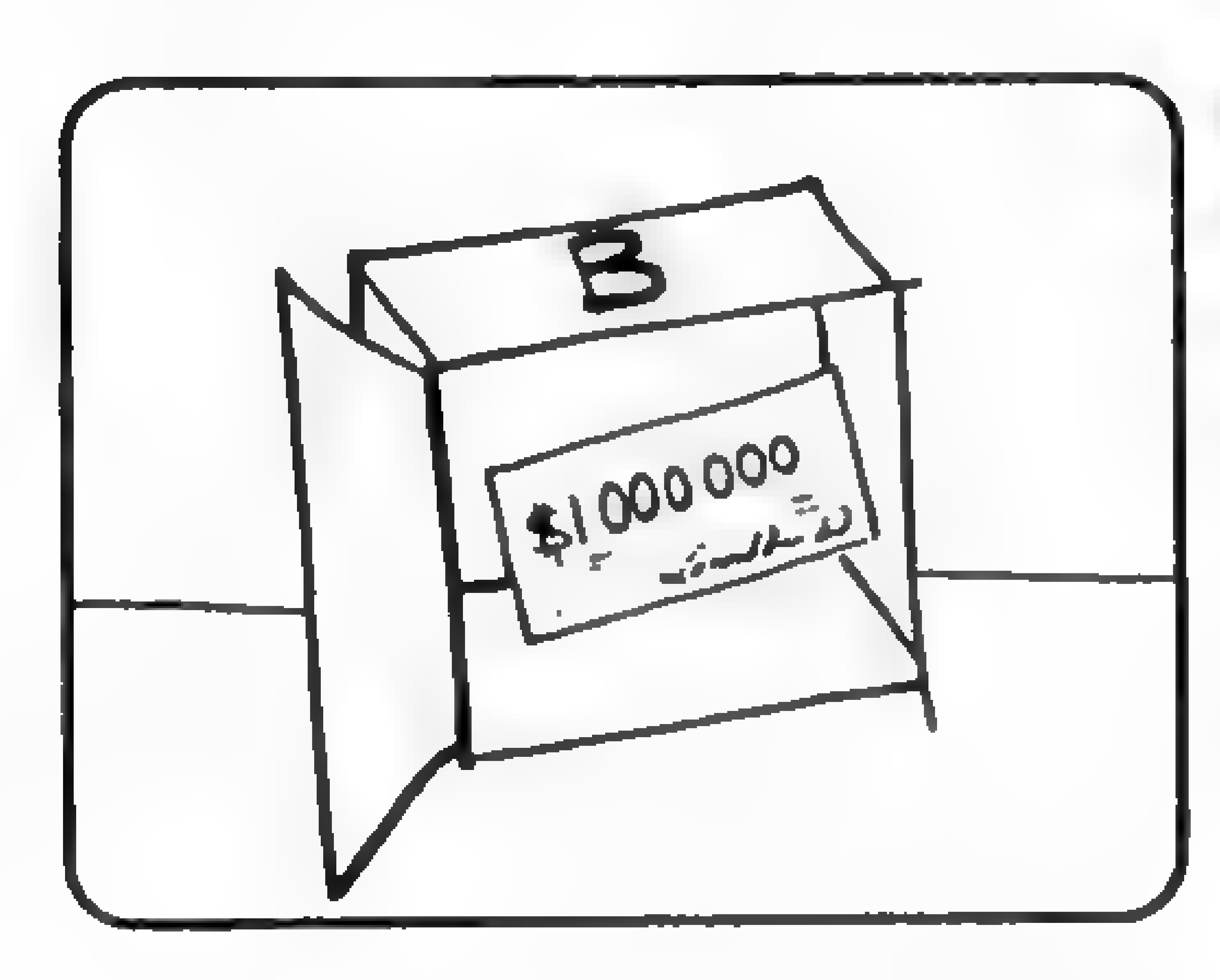


圖 5：亞米茄：「你另外一個選擇是只拿 B 箱。如果我預期你會只拿 B 箱，我就會放一百萬元在 B 箱裏。」

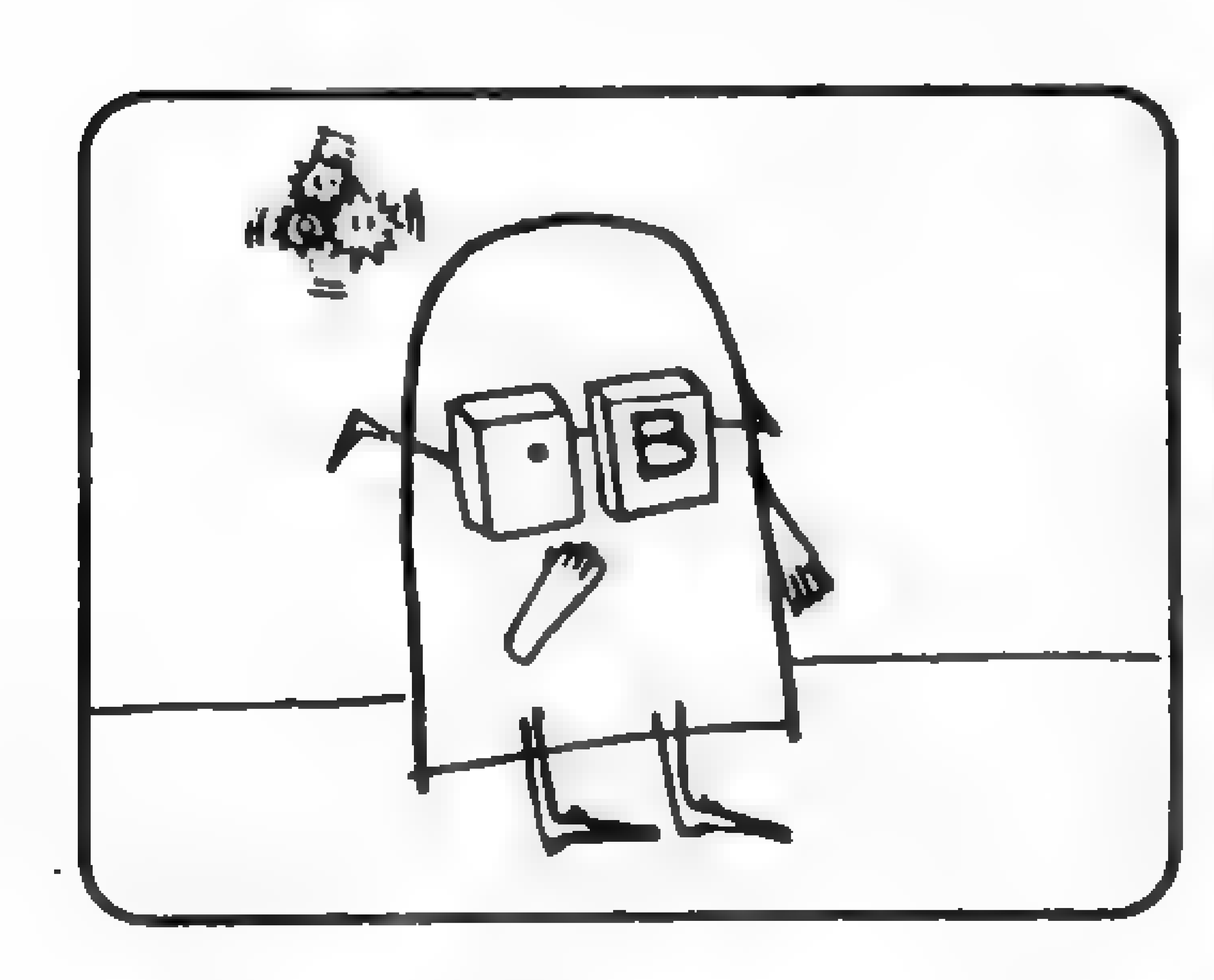


圖 6：一名男子選擇只拿 B 箱，他的推理是：「我已經觀察亞米茄的測試好多次了，他每次都猜對。選擇拿兩個箱子的人都只得到一千元，所以我要只選 B 箱，我就成了百萬富翁。」

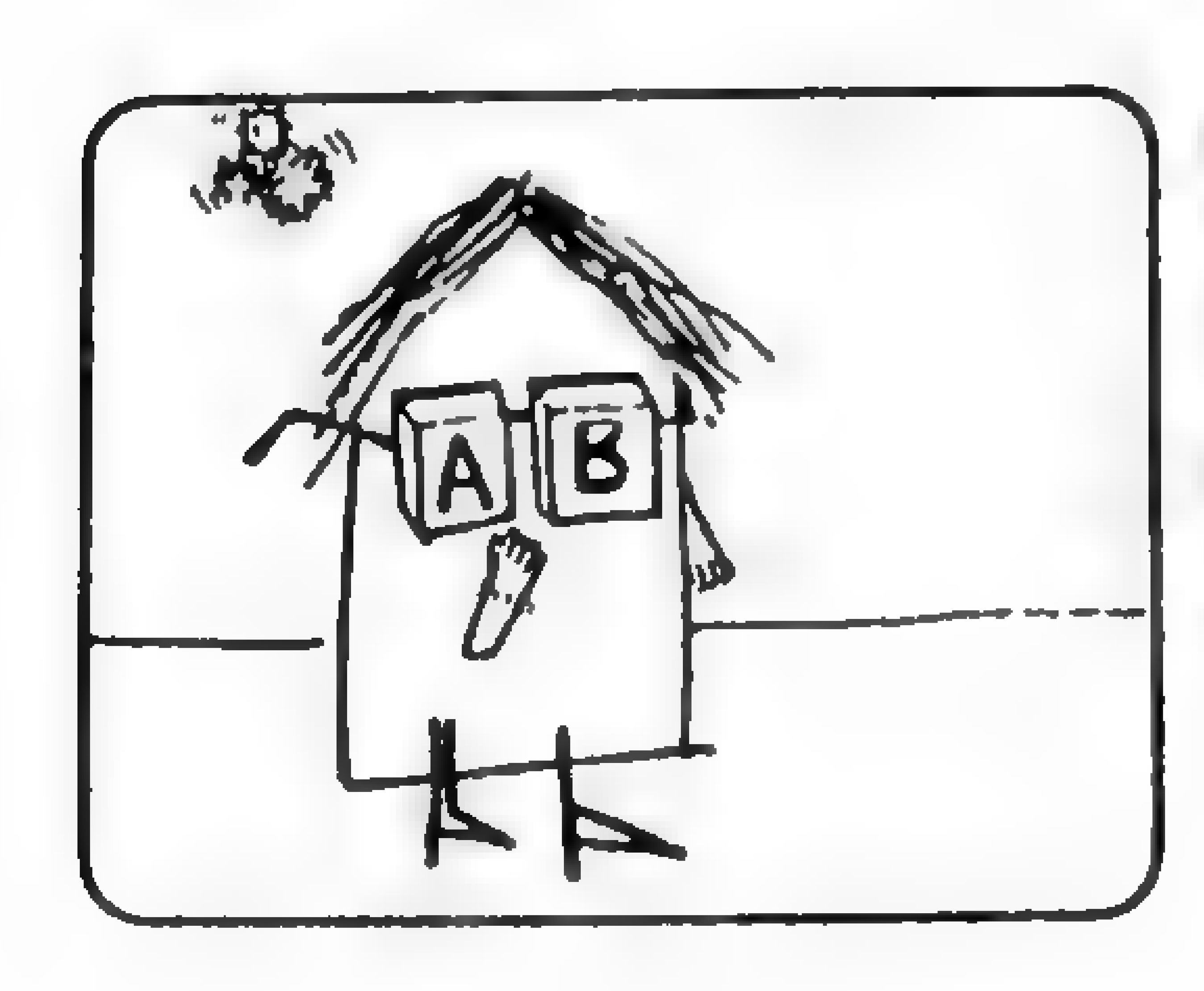


圖 7：有位女士則選擇同時拿走兩個箱子，她的推理是：「亞米茄預測完後就離開了，所以 B 箱內的東西是不會再更動了，空的就是空的，有一百萬就有一百萬。所以我要同時拿走兩個箱子。」

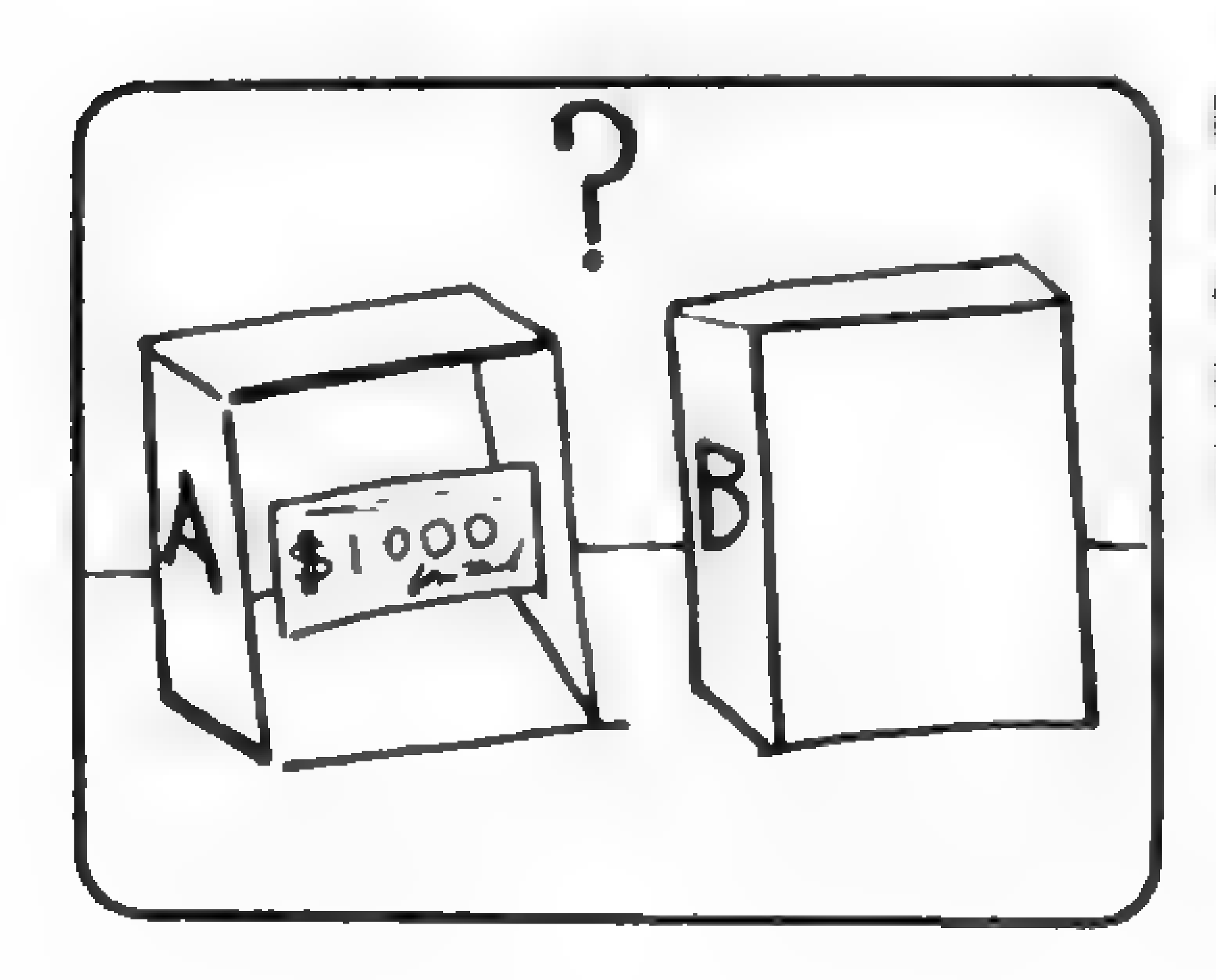


圖8：你覺得誰的決定最爲明智？不可能兩個人的推理都正確，到底哪一位錯了？又爲什麼錯？這是個新的矛盾，專家到目前也不知如何解決。

這是近來哲學家最感困惑的預測矛盾，討論的也最多。這個矛盾由物理學家紐康(William Newcomb)首創，故稱之爲「紐康矛盾」(Newcomb's Paradox)。

選擇B箱的決定是很容易理解的。我們再把（同時選擇A箱和B箱的）那位女士的論證弄清楚，她認爲亞米茄已經離開了，所以B箱不是空的就是放著一百萬，誰都不能再更動。現在讓我們來剖析這兩種情形。

如果B箱放著一百萬，而那位女士只選B箱，那麼她就只得到一百萬；可是如果她兩箱都拿走，那麼她就會多得一千元。

如果B箱是空的，而她只選B箱，那麼她什麼也得不到；可是如果她選擇同時拿走兩個箱子，那麼她至少可得到一千元。

所以無論如何，她選擇同時拿兩個箱子，至少可以得到一千元。

這個矛盾就像是種測試一個人是否有自由意志的試紙，相信自由意志的人會選擇同時拿走兩個箱子，而宿命論者則會選擇只拿B箱。有些說法則認爲這個矛盾所需的條件原本就有問題，更遑論往後的狀況是否完全在控制之下了。



數　字

0 ZERO
1 ONE
2 TWO
3 THREE
4 FOUR
5 FIVE
6 SIX
7 SEVEN
8 EIGHT
9 NINE

數學發展的歷史常受到矛盾的影響，由於這些矛盾和我們的直覺相牴觸，因此常把數學家搞得昏頭轉向。以下這些數字的發現就是一些很典型的例子：

1. 無理數：如$\sqrt{2}$、π、e（自然對數）等。
2. 虛數：如$\sqrt{-1}$和複數（虛數與實數的結合）。
3. 有些數字不能適用於乘法交換律，即：$a \times b \neq b \times a$。
4. 另有些數字違反乘法結合律，即：$a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c$。

這章所講的矛盾大部分和有理數有關係，也包括了一些無理數和無限數，希望能帶領讀者走進數字理論中的一些重要領域。

六椅七人坐的奧祕

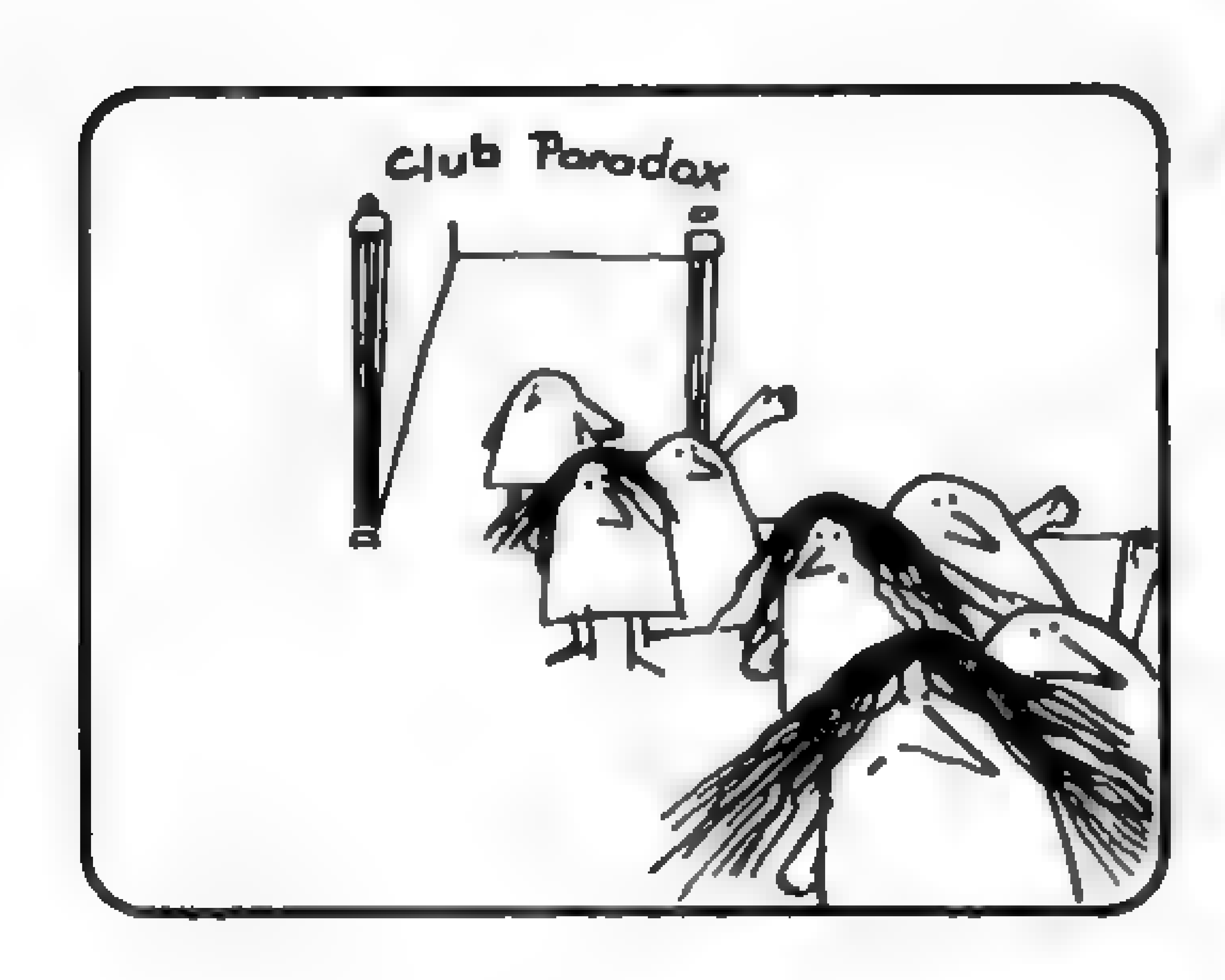


圖 1：六個學生在一家熱門的狄斯可舞廳訂了六個位子，到了最後一刻，第七位學生突然加入。

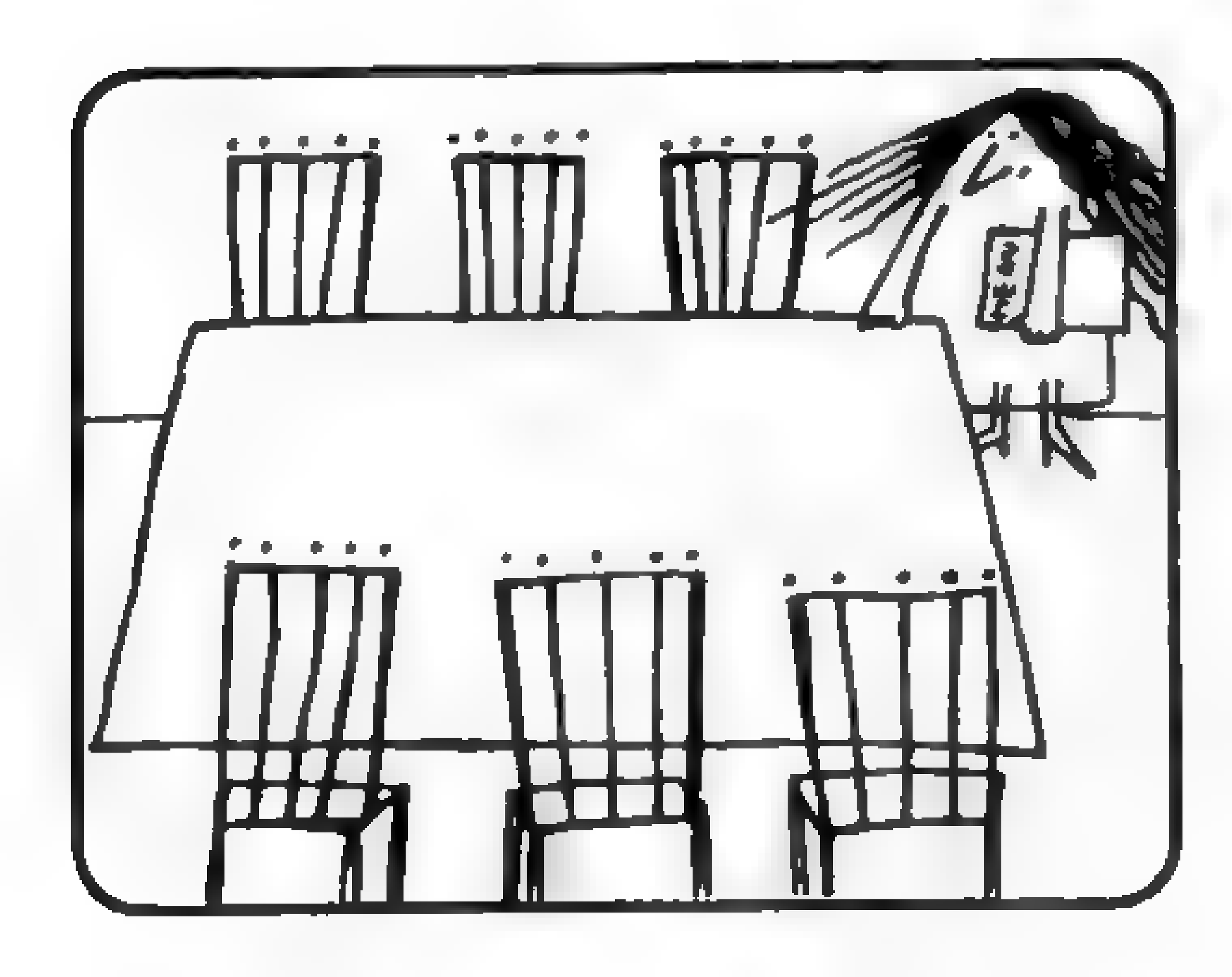


圖 2：老闆：「謝天謝地，這些孩子總算到了，我早已準備好六個位子，咦！ 我看到有七個人。」

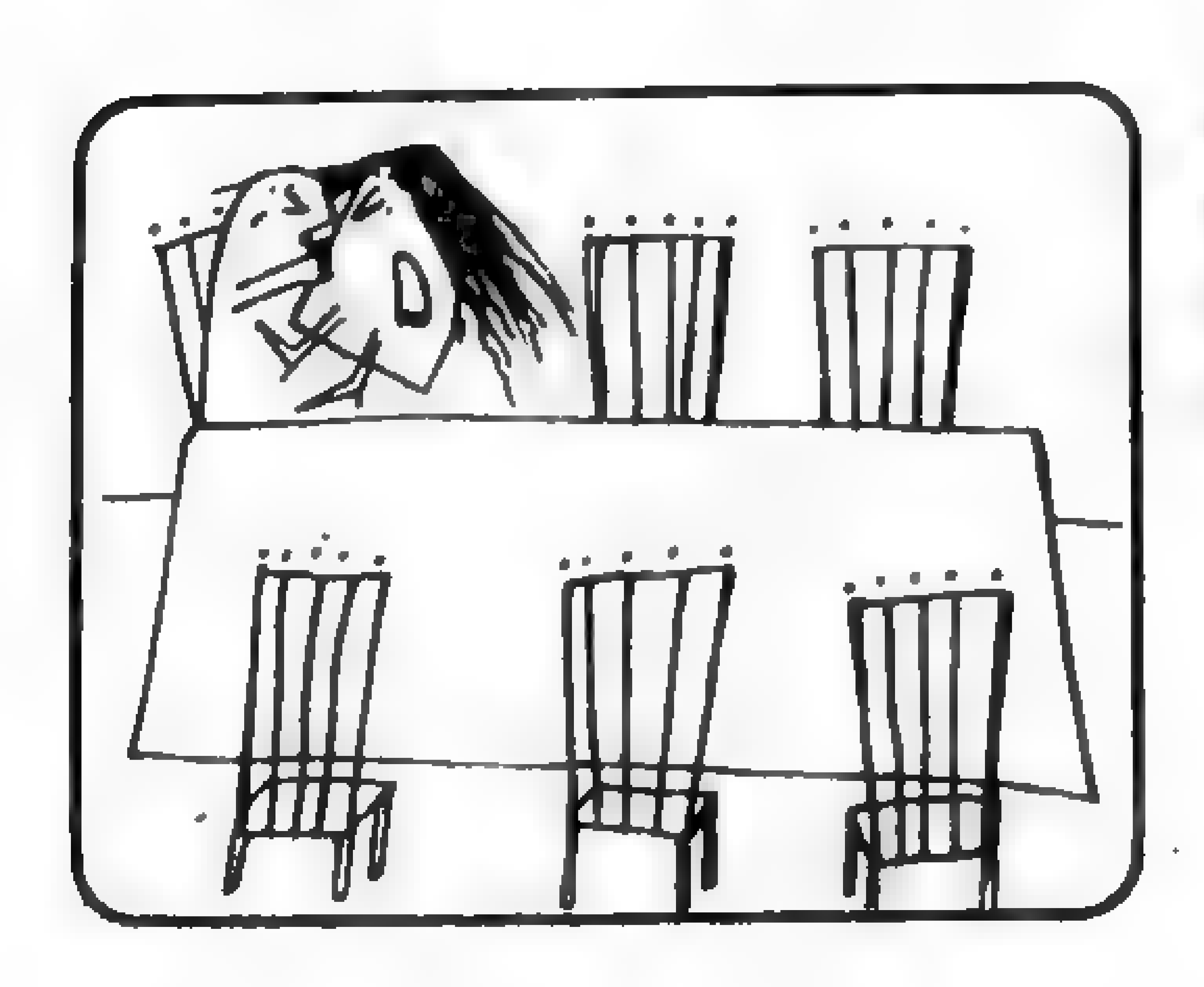


圖 3：老闆：「不過沒問題，只要請第一位學生入座，然後讓他的女友先坐在他腿上擠一下就可以了。」

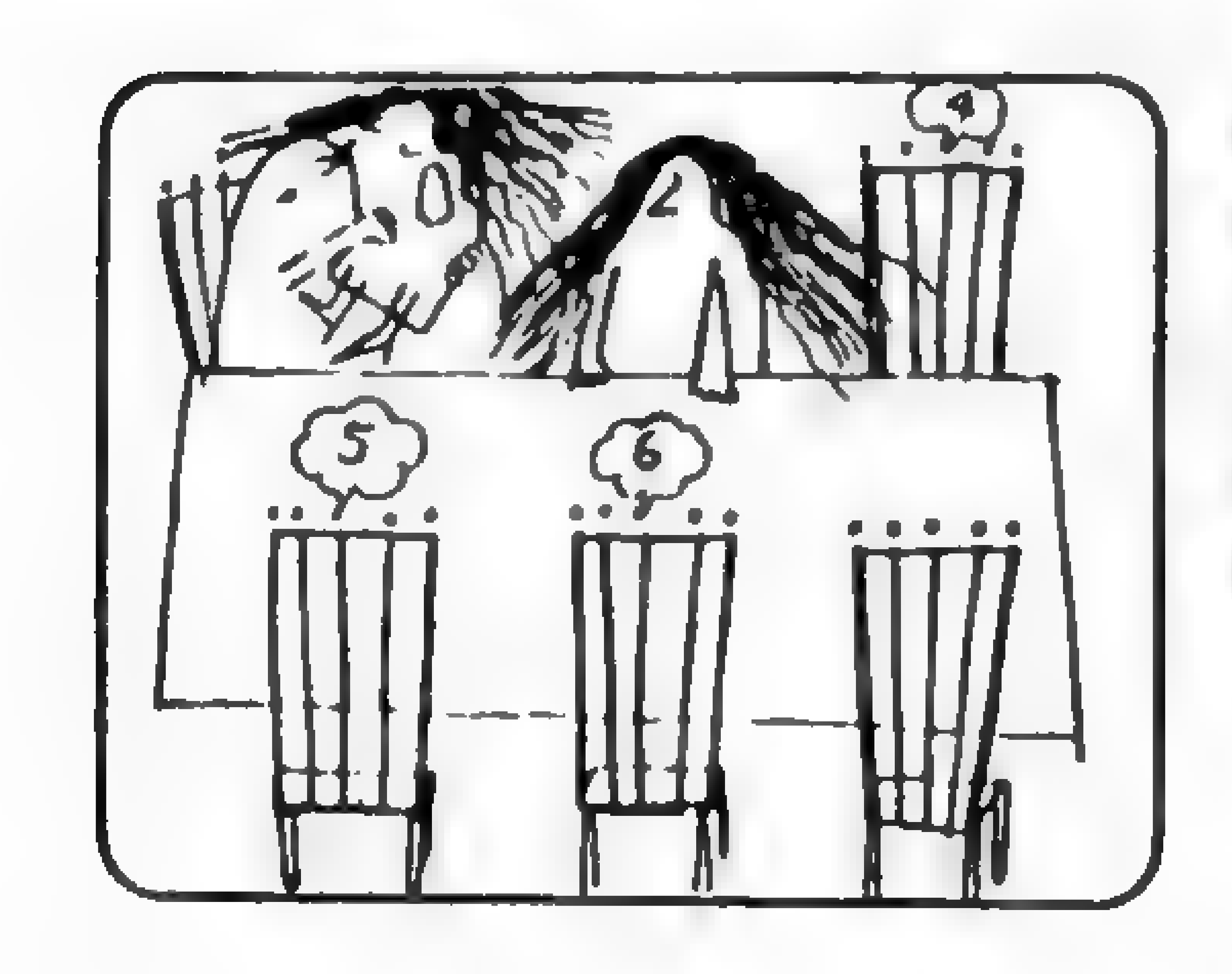


圖 4：老闆：「現在第三個學生就可坐到第二張椅子上，然後第四個學生坐到她旁邊。接著讓第五個學生坐到那一對情侶的對面，再請第六個學生坐到他旁邊。這樣就一共有六個學生入座了，而且還剩一個空位。」

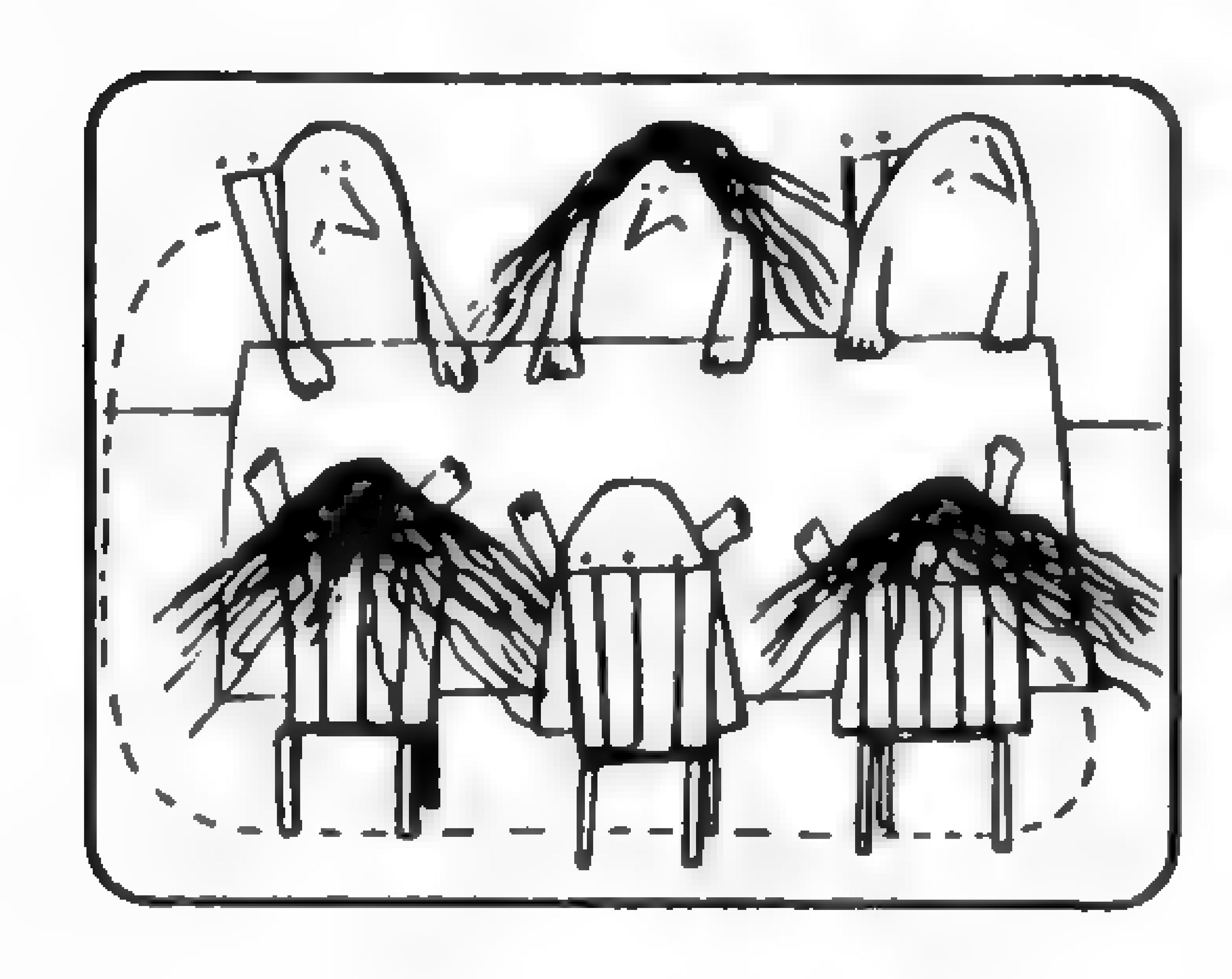


圖 5：老闆：「現在我就可以讓第七位學生從她男友的腿上下來，繞過桌子，坐到那讓空的椅子上。」

這是不是太棒了，七個人坐在六張椅子上，而且是一人一張。

要指出其間的謬誤並不難，只要明白那位起先和男友暫時擠一張椅子的女孩，其實是第二位，而非像老闆誤以爲的第七位，眞正的第七位學生從頭到尾根本就沒走近過桌子。坐到第六張椅子上的女孩，其實就是第二位。

這個矛盾顯然是違背以下的定理：有n個元素的有限集合(finite set)，只可以和另一個有n個元素的有限集合間有一對一的對應關係。在後面「無限旅館」一文中，講到無限集合(infinite set)時，會再提到此定理。這個「六椅七人坐」的故事，趣味地說明了有限集合和無限集合之間的不同。

算不清楚的利潤

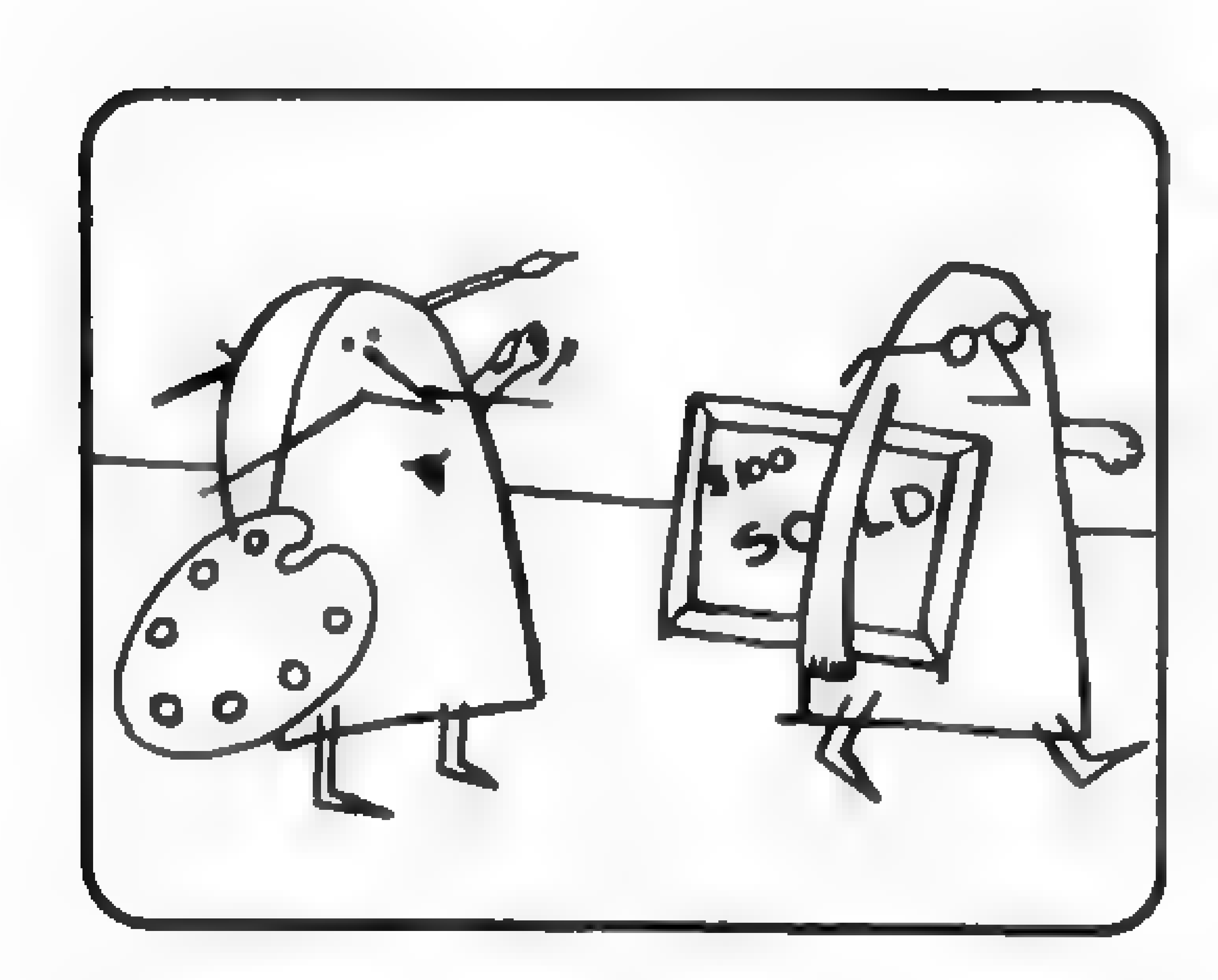


圖1：丹尼把一幅自己的畫以一百元賣給喬治。丹尼：「喬治，這回可讓你佔到便宜了，這幅畫在十年內會增值十倍。」

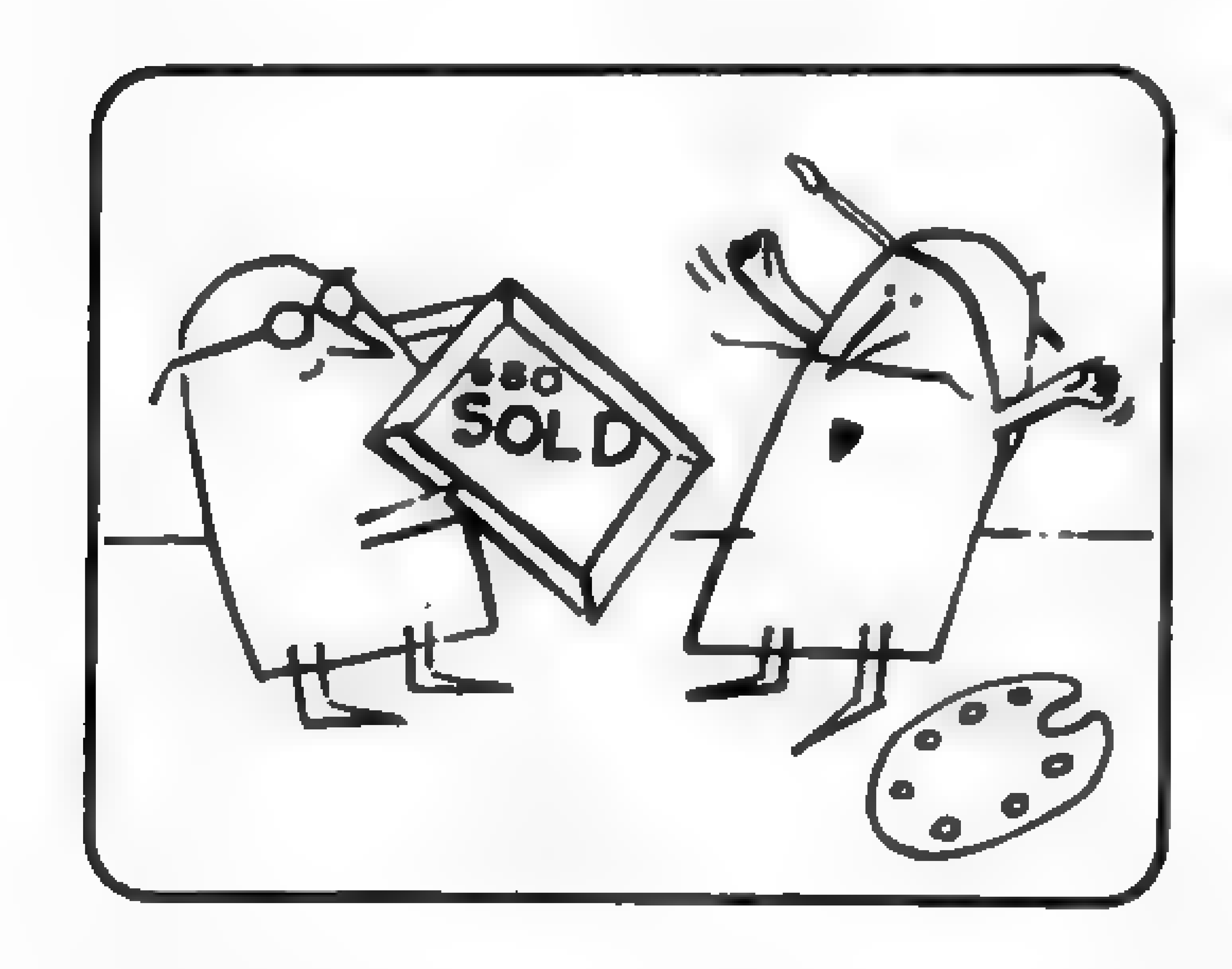


圖2：喬治把畫掛在家裏一陣子以後，他覺得不順眼，於是把畫以八十元賣回給丹尼。

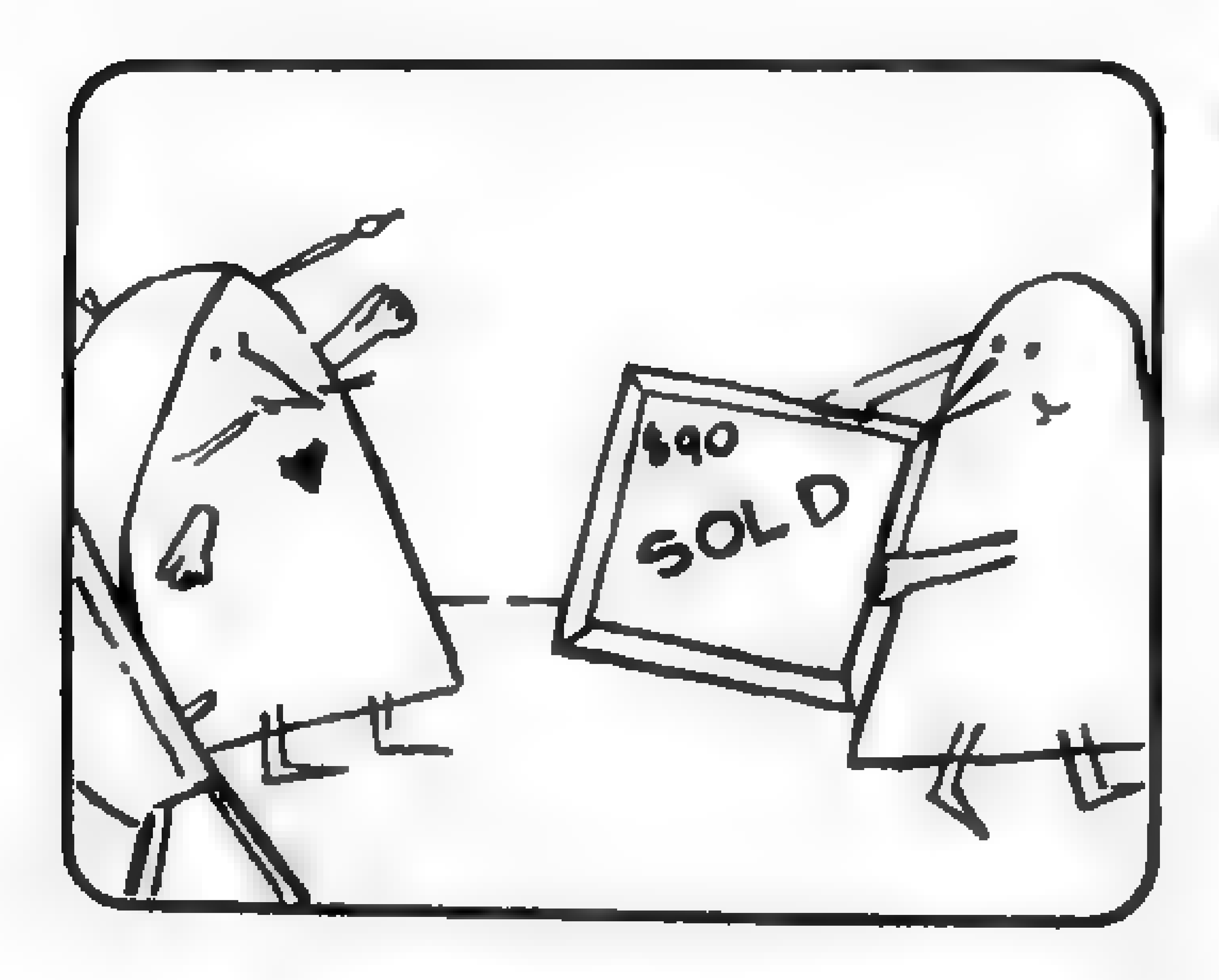


圖3：一個星期後，丹尼又把畫以九十元賣給蓋瑞。丹尼說：「蓋瑞，讓你賺到了，十年內，這幅畫會漲五十倍。」



圖 4：丹尼樂得很，他想：「這幅畫起初以一百元賣出，剛好夠材料費加上我畫畫的時間，所以這個買賣是不賺不賠。後來我以八十元買回，再以九十元賣出，所以我賺了十元。」

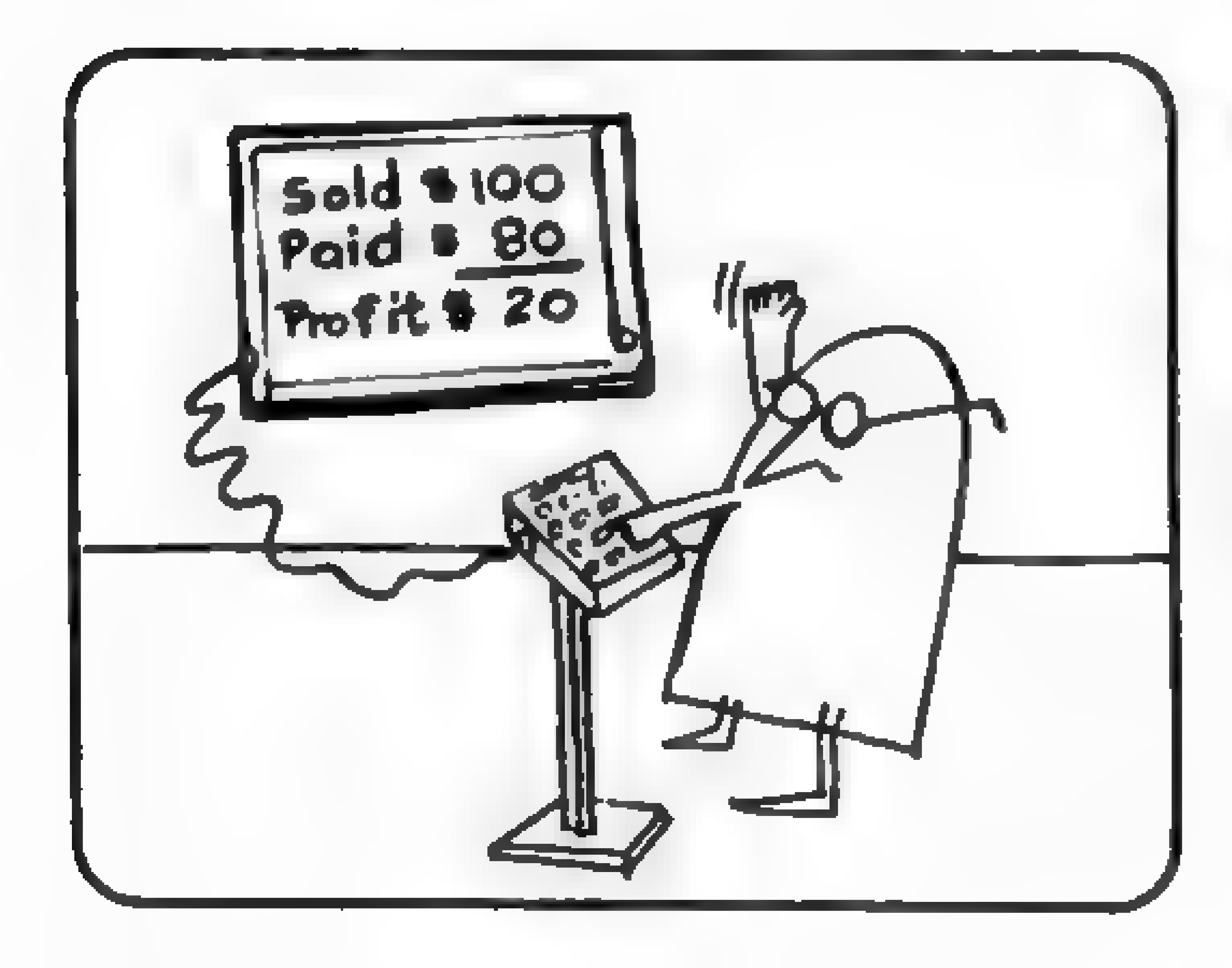


圖 5：喬治的算法則不同。他認爲畫家以一百元賣出他的畫，再以八十元買回，所以他已賺了二十元。至於九十元的買賣，可以不加進來算，因爲這幅畫本身差不多就值九十元。

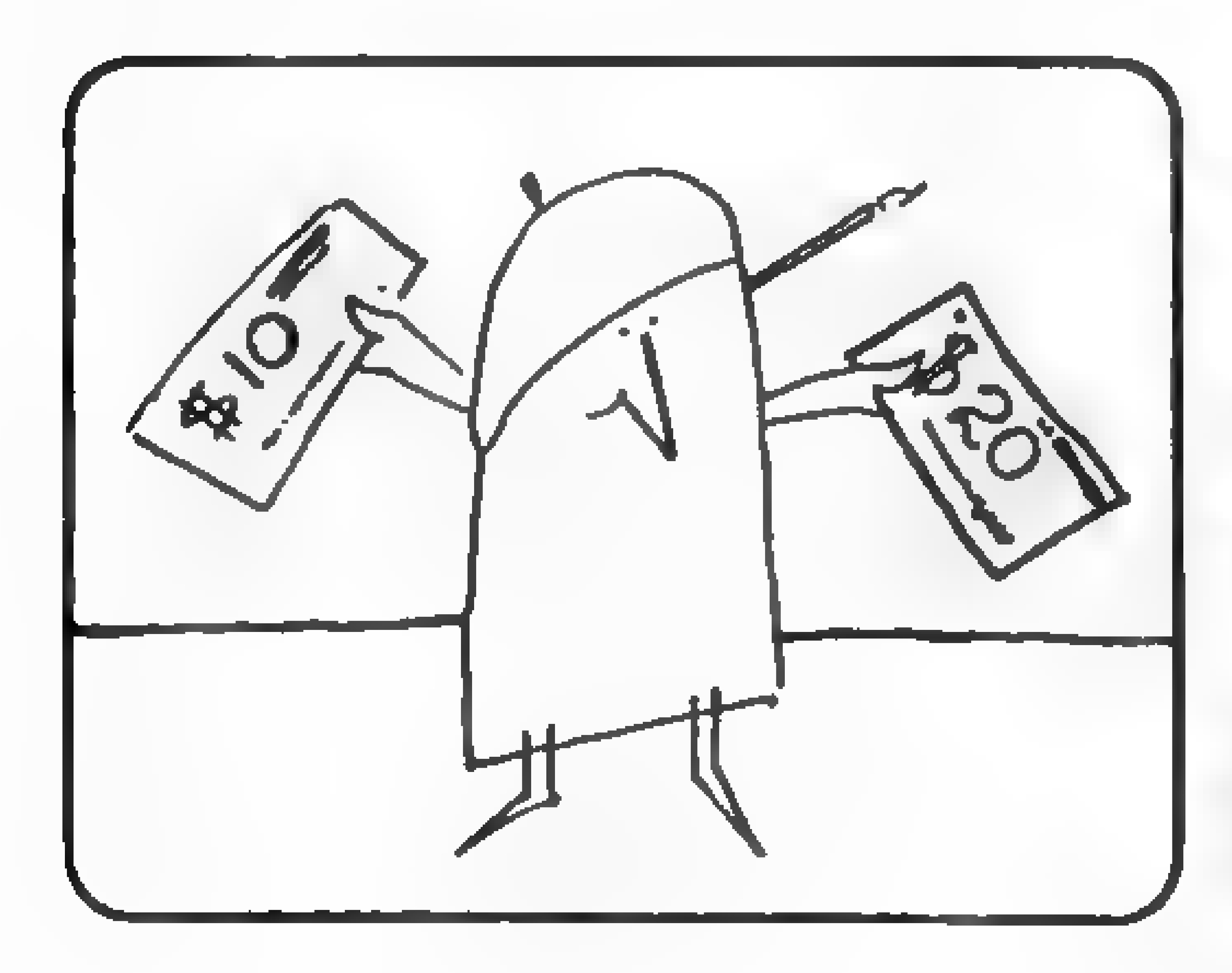


圖 6：蓋瑞又是另一種算法。他認爲畫家把畫以一百元賣出，再以八十元買進時，已經賺了二十元。然後在他再把畫以九十元賣出時，又賺了十元，因爲原先他是以八十元買進的。所以加起來一共是賺了三十元。到底這位畫家賺了多少錢？十元、二十元或是三十元？

這一類的爭執常是公說公有理，婆說婆有理。其實仔細想一下，爲什麼會出現各家的算法，是因爲這個問題本身的定義不明確。

缺乏有關這幅畫的「成本」資料，我們根本無法算出畫家賺到的實質利潤。我們先不算畫家作畫的時間成本，只算畫家丹尼花二十元來買作畫的材料—顏料、畫布和畫框等。這幅畫經過三次交易後，畫家一共拿到一百一十元。如果我們把利潤定義爲材料成本和最後所得間的差額，那麼畫家賺到九十元。

但是因爲我們無從得知材料的成本（只能自己假設），所以無法計算出實質利潤。表面上看起來這是算術的問題，其實問題是出在沒有對實質利潤下定義。這種矛盾就像是問人家：如果沒有耳朶能聽，那麼一棵樹在森林中倒下來還會有聲音嗎？這個問題的答案就全看對「聲音」的定義如何。

人口爆炸

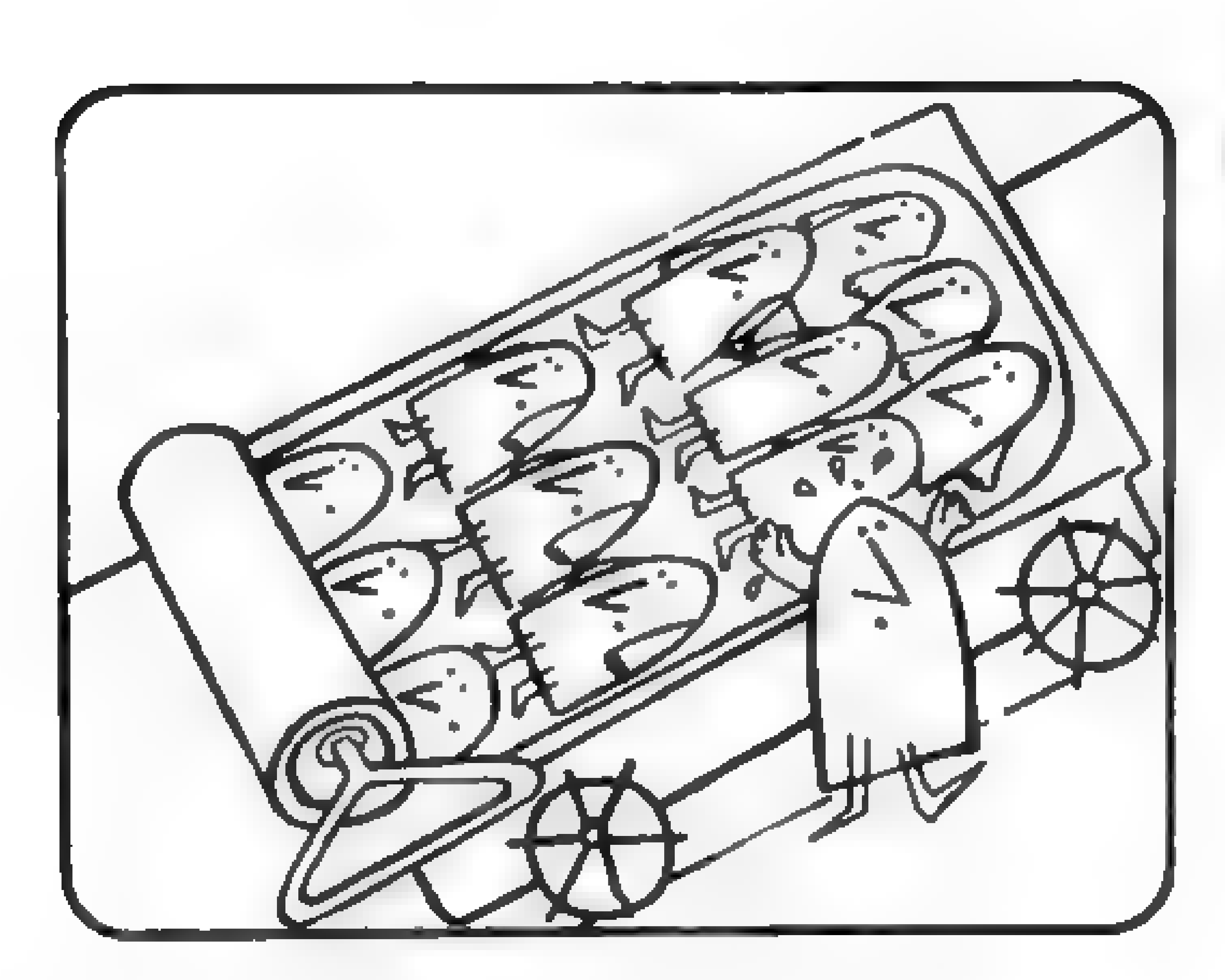


圖1：最近我們常聽到有人談論地球人口激增的問題。

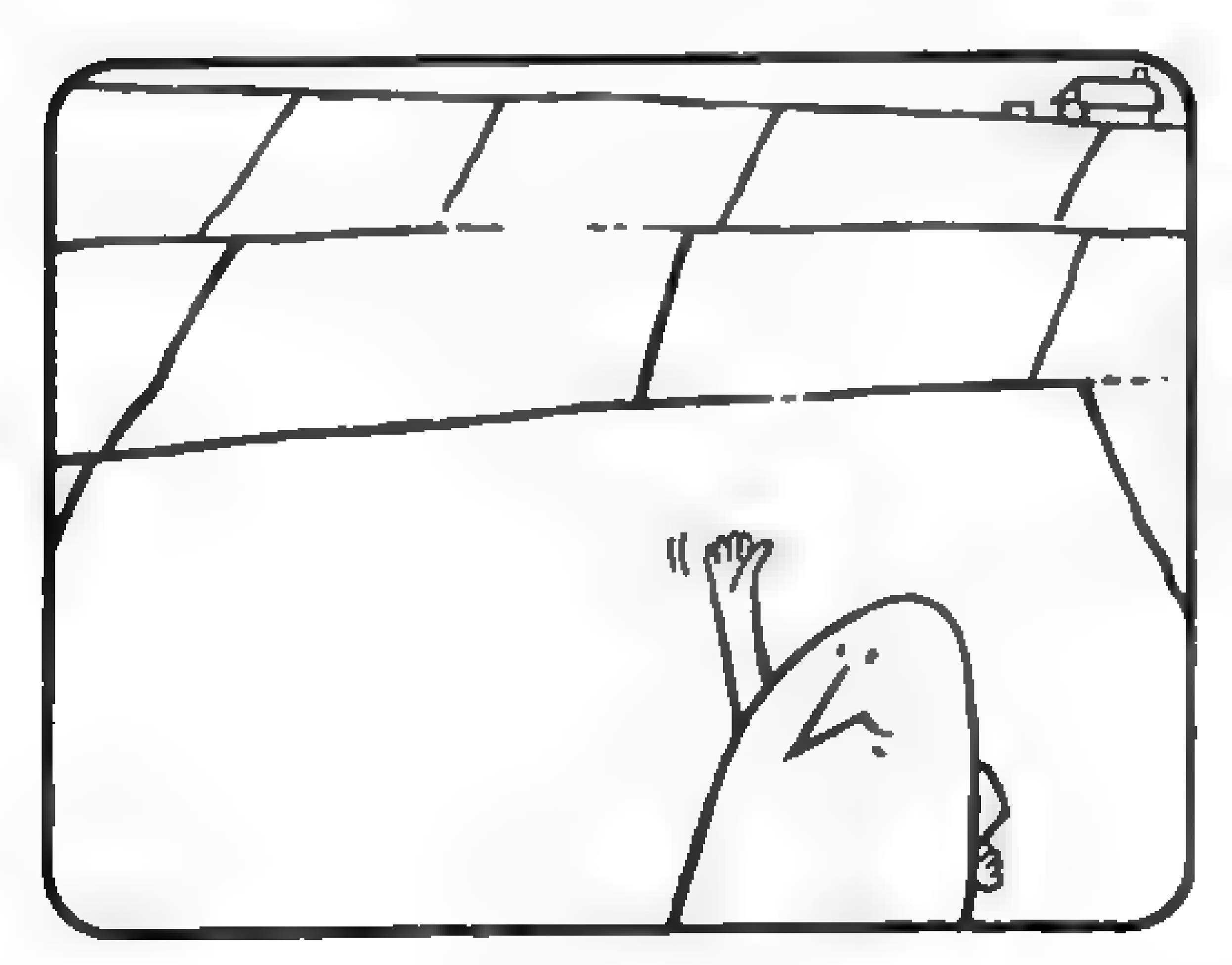


圖2：「反節育聯盟」的總裁傻蛋先生卻不同意這個說法，他反而認爲世界人口在減少中，不久每個人都會有更多的空間。以下是他的說法。

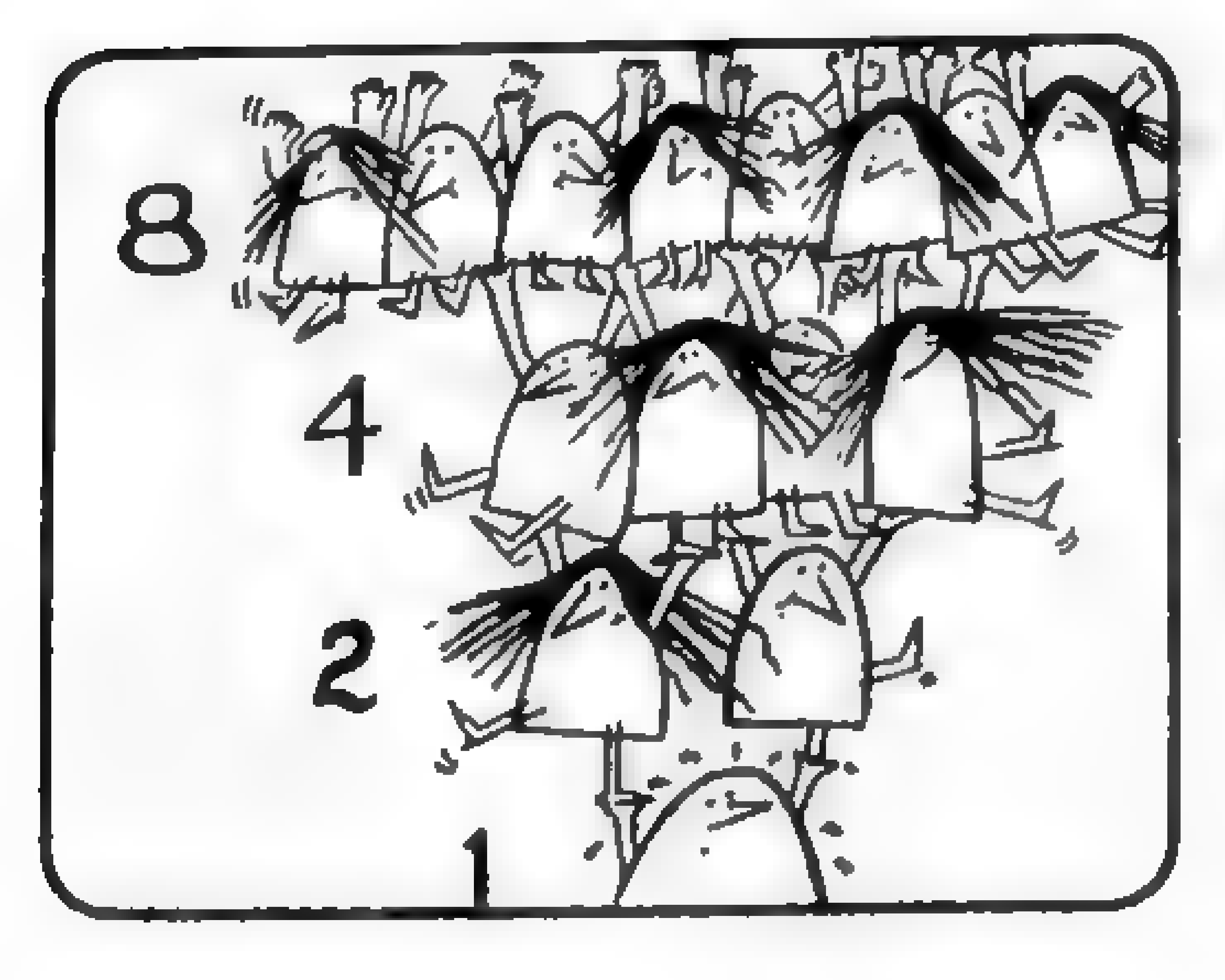


圖3：傻蛋先生：「每個活著的人都有父母兩位，父母上頭又各有父母兩位，所以祖父母輩就有四位；祖父母上又各有父母，於是曾祖父母輩就有八位。所以每回溯一代，人數就增加一倍。」

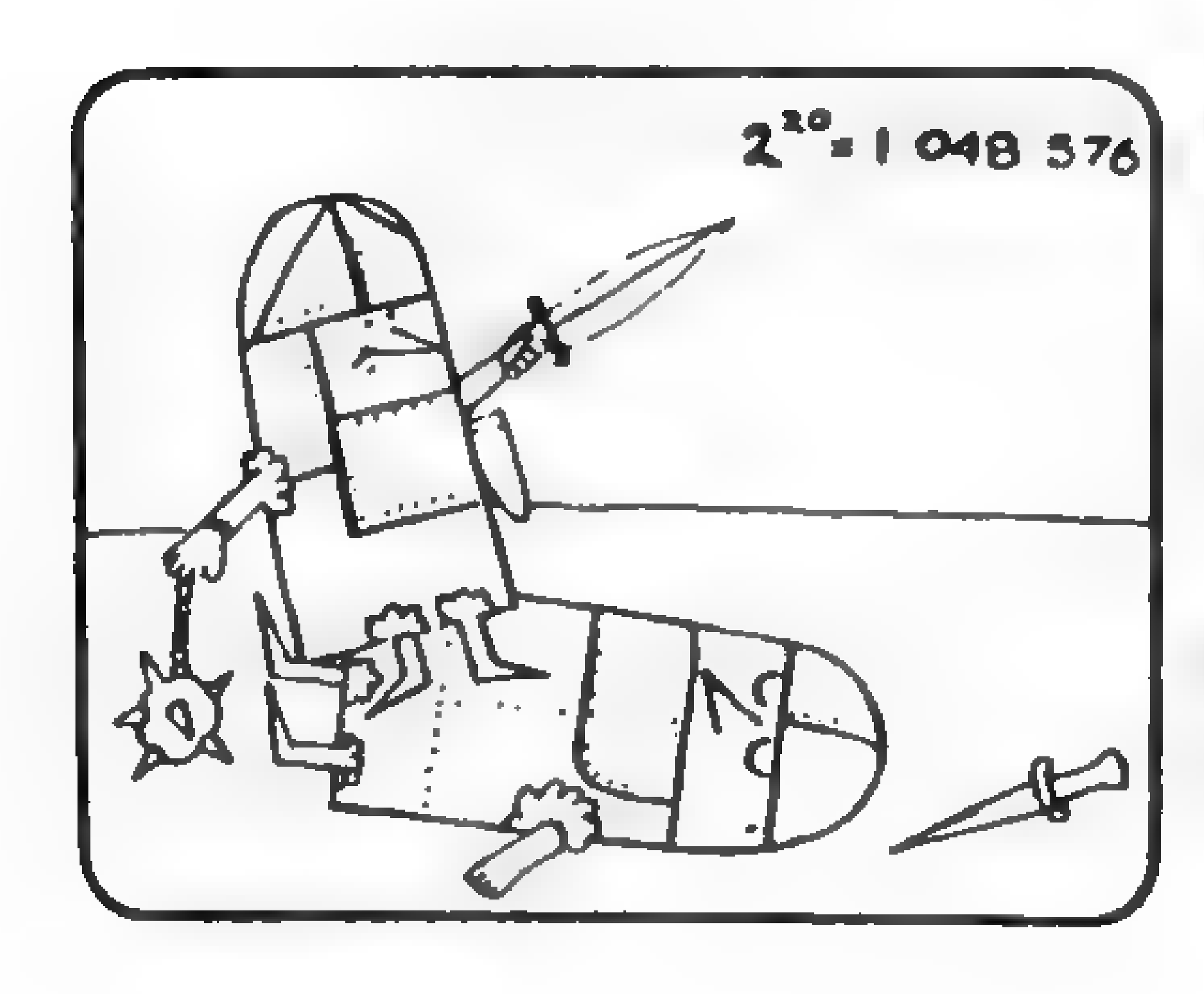


圖 4：傻蛋先生：「如果你回溯二十代到中世紀時代，你的祖先一共有一百零四萬八千五百七十六人。想想看每個人都是如此，所以在中世紀時的人口是現在的一百多萬倍。」
傻蛋先生的講法當然不對，可是他的推理錯在那兒呢？

傻蛋先生的論證只有在下述兩個假設成立時才爲眞，亦即：

1.每個活著的人的族譜上，每位祖先只能出現一次。

2.同樣的人不能出現在不同族譜上。

而這兩項假設都不可能成立。如果一對夫婦有五個孩子，而每個孩子又各生了五個孩子，那麼這對夫婦就成爲二十五個人個別族譜上的祖父母。再說，如果你回溯任何族譜，都會因爲婚姻關係而與其他遠親的族譜重疊。

傻蛋先生的說法犯的謬誤是，他既沒考慮到個別族譜的重複現象（如兄弟），也沒考慮到各個不同族譜之間的巨大交集現象。在傻蛋先生的論證中，有百萬人重複出現百萬次。

很多人都會訝異於等比級數增加之快。如果甲同意每天給乙加倍的錢，第一天一元，第二天二元，第三天四元……，一直這樣加倍，到了第二十天，你會驚訝甲得給乙一百多萬元。

數學上有沒有妙方可以很快得到二的等比級數前二十項的總和？有的！只要把

最後一個數目乘以二，再減一，就是前二十個數的總和。例如第二十個數是一〇四八五七六，那麼前二十個數的總和是：(2×1,048,576)－1＝2,097151

這個方法適用於二的等比級數任何部分前項的總和。發現簡單的解題方法是很具挑戰性的遊戲，你大概也躍躍欲試吧。

被搞糊塗的司機

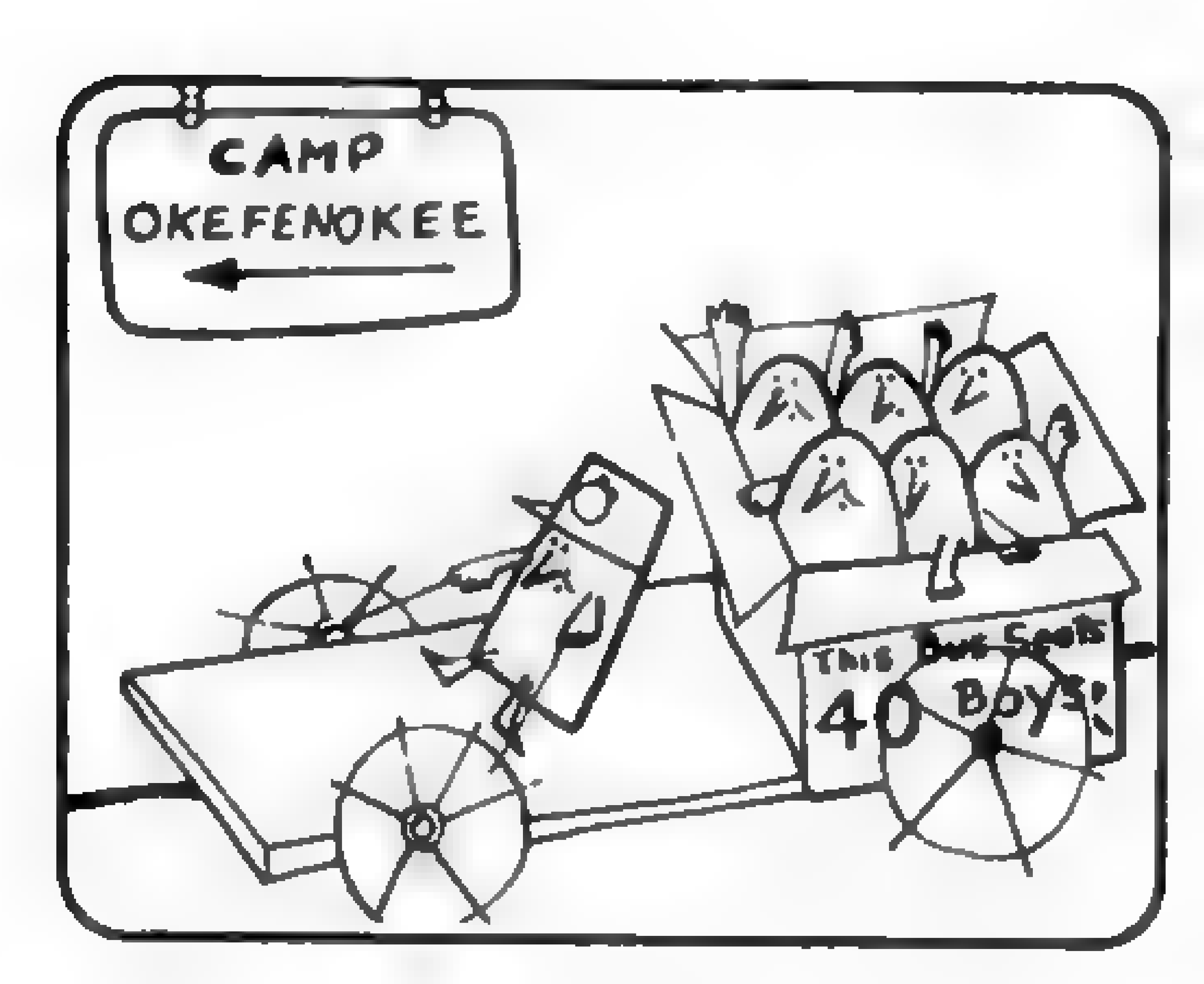


圖1：車上坐滿了四十位男孩，車子馬上就要出發開到校園去。

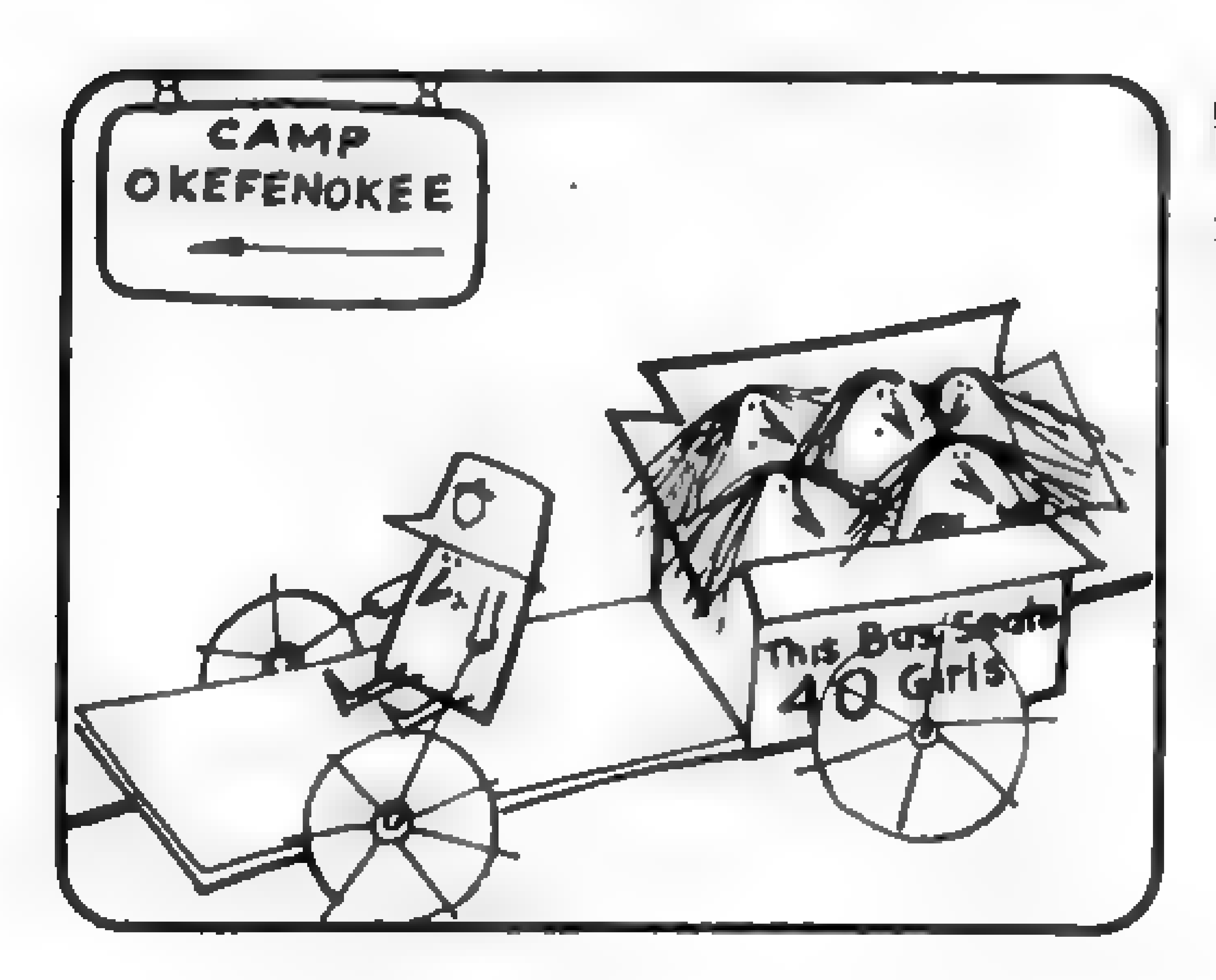


圖2：這部車上坐滿了四十位女孩，也是去學校。

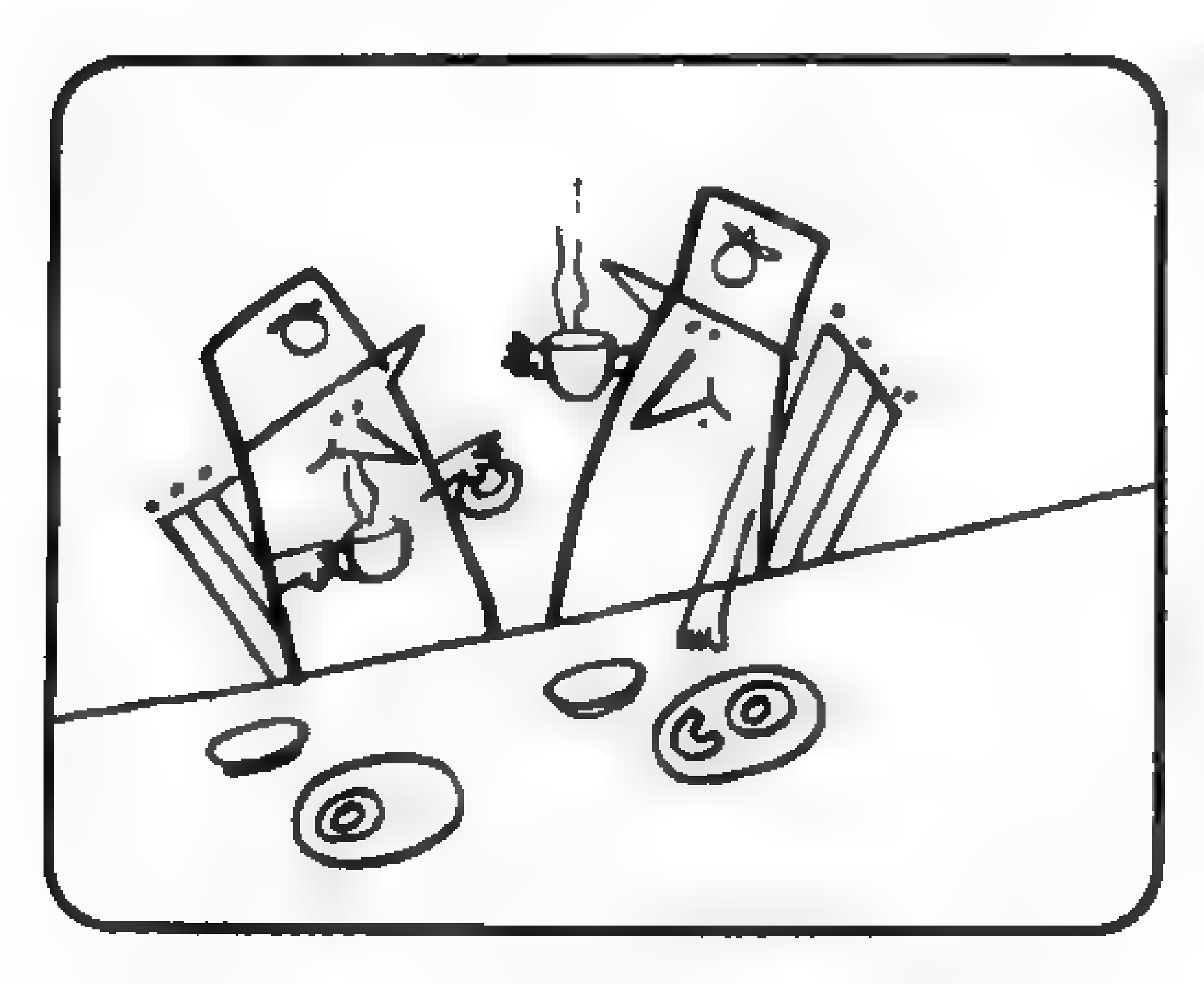


圖3：在開車前，兩位司機先來杯咖啡。

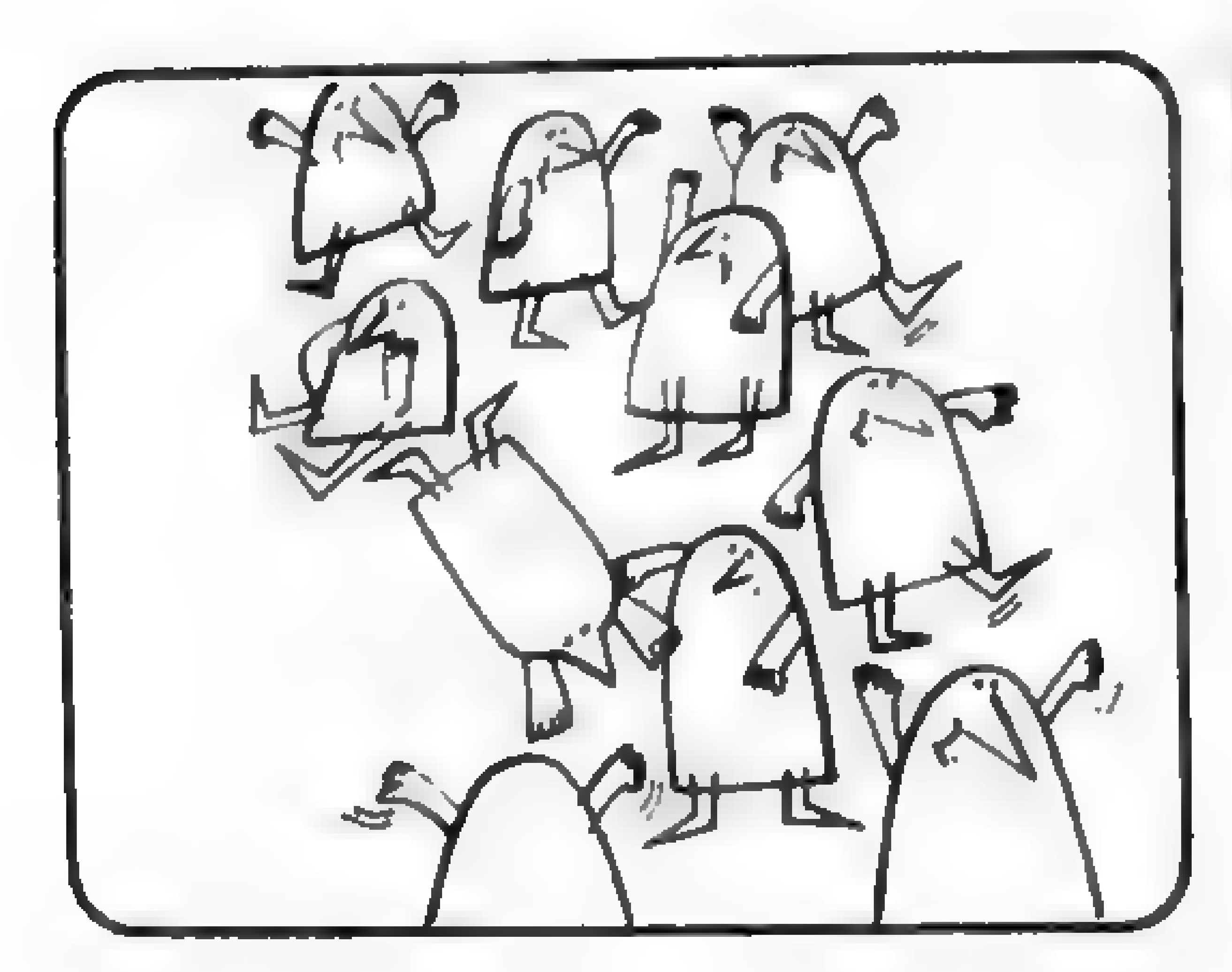


圖 4：趁這個時候，有十個男孩偷偷下車，潛入女孩的車上。

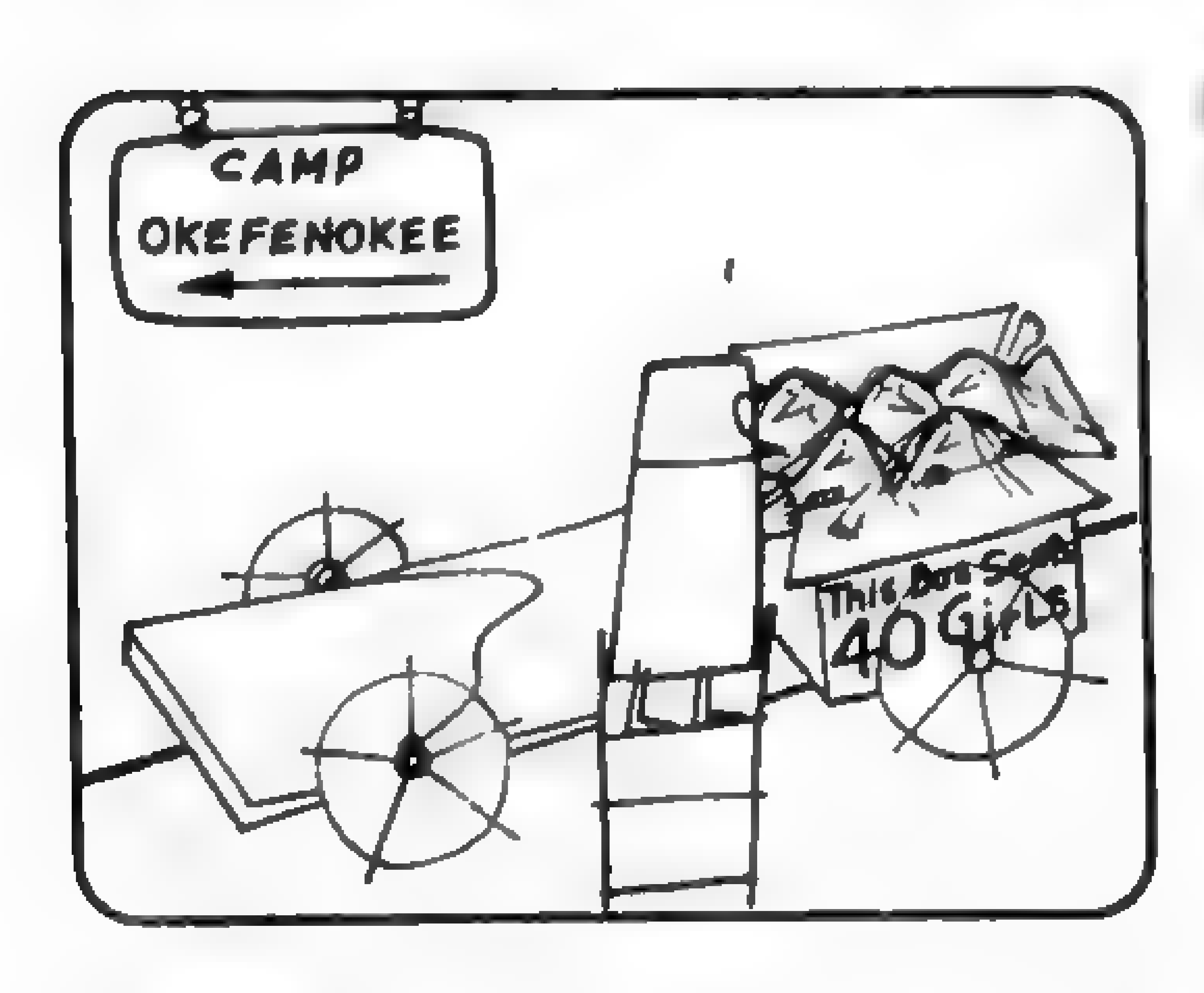


圖 5：女孩車的司機回到車上時，他發現車上多了乘客。

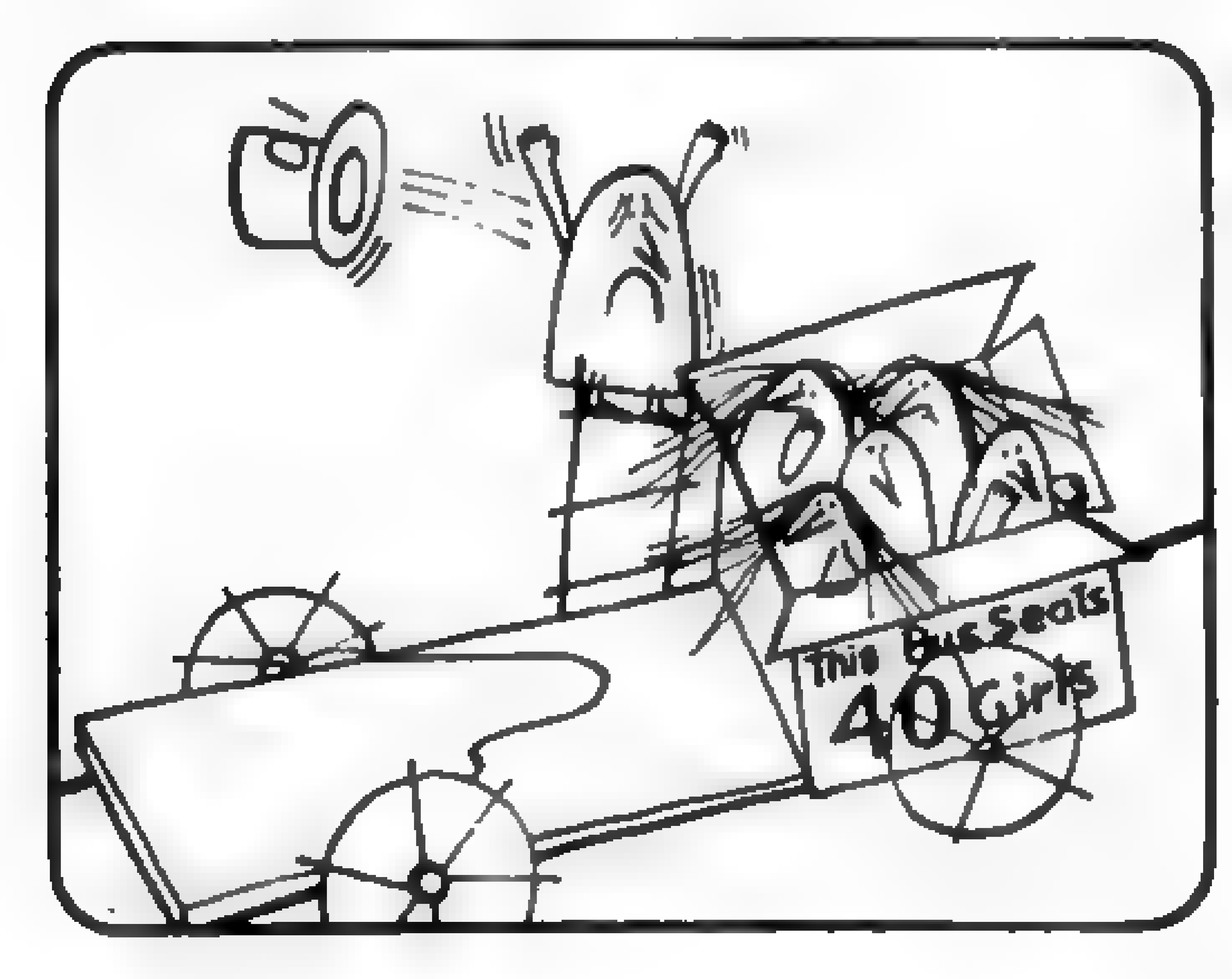


圖 6：司機說：「夠了，別鬧了，這部車只能載四十個人，多出的十個人最好趕快下車！」

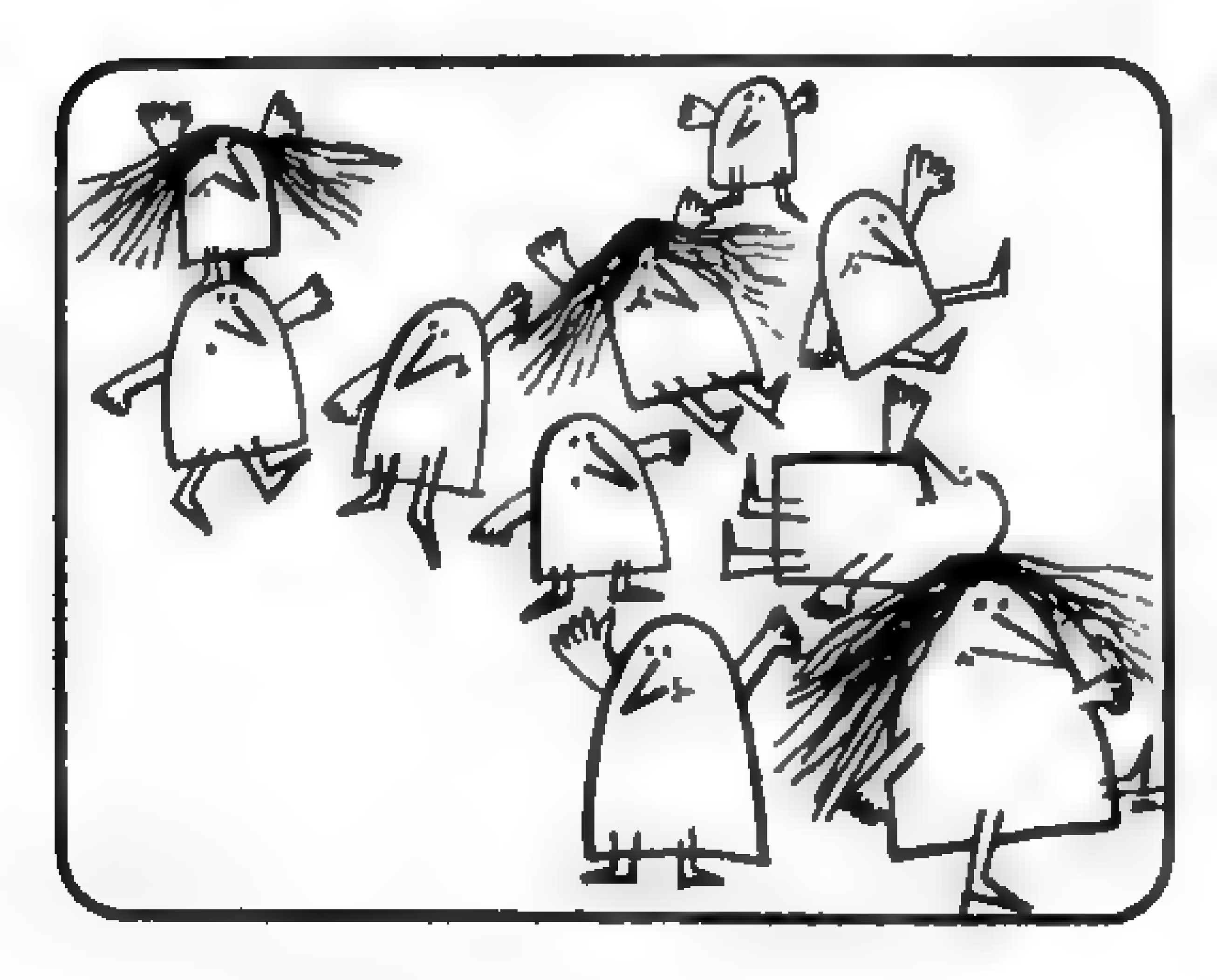


圖 7：於是有十名（性別不明的）乘客下了車，坐到有十個空位的男孩車上。現在兩部車都坐滿了四十人，出發上學去。

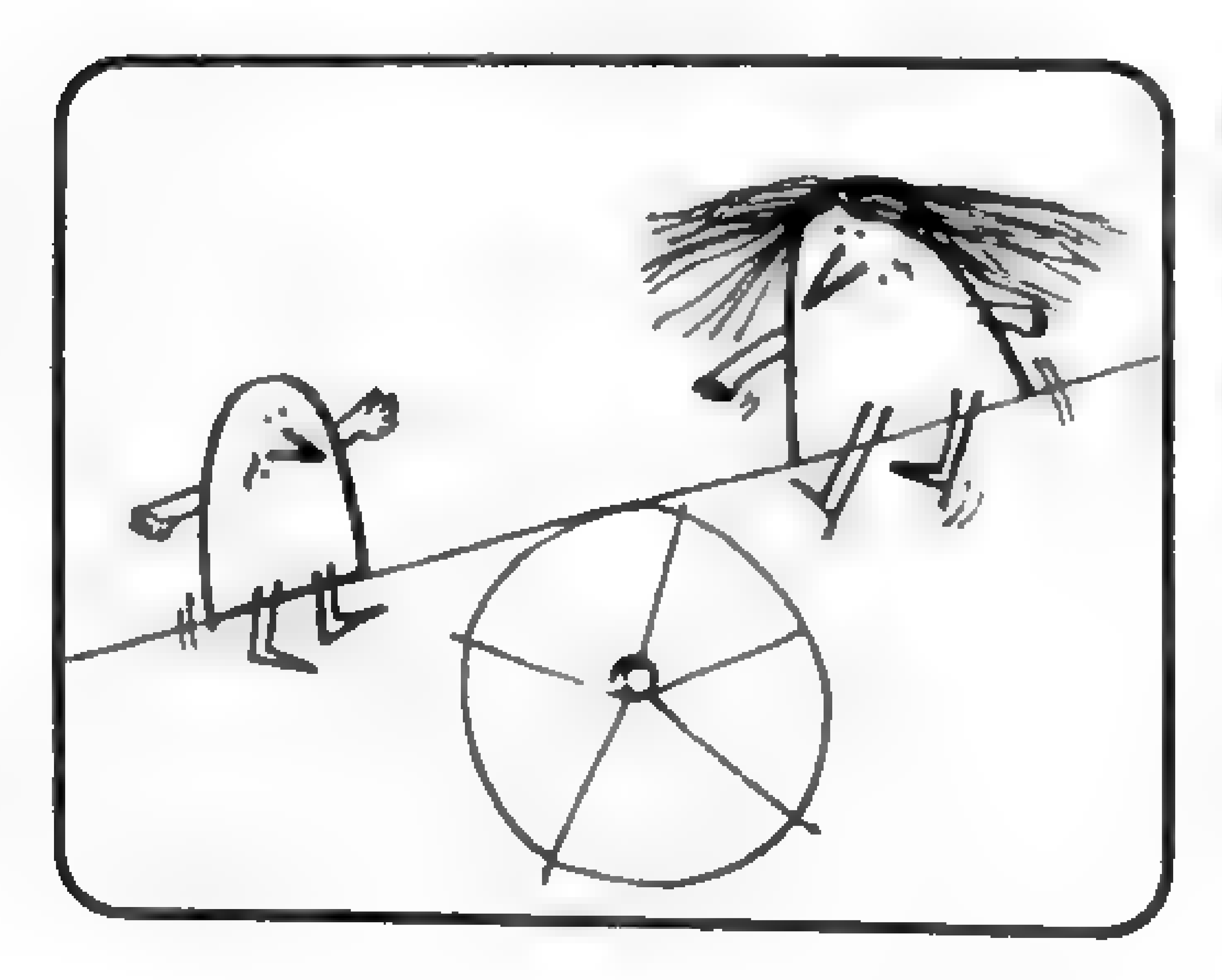


圖 8：過了一會，開女孩車的司機開始想：「不對喔！我確定有男孩在我車上，所以必然在男孩車上也有女孩，不曉得那部車上坐錯的人多？」

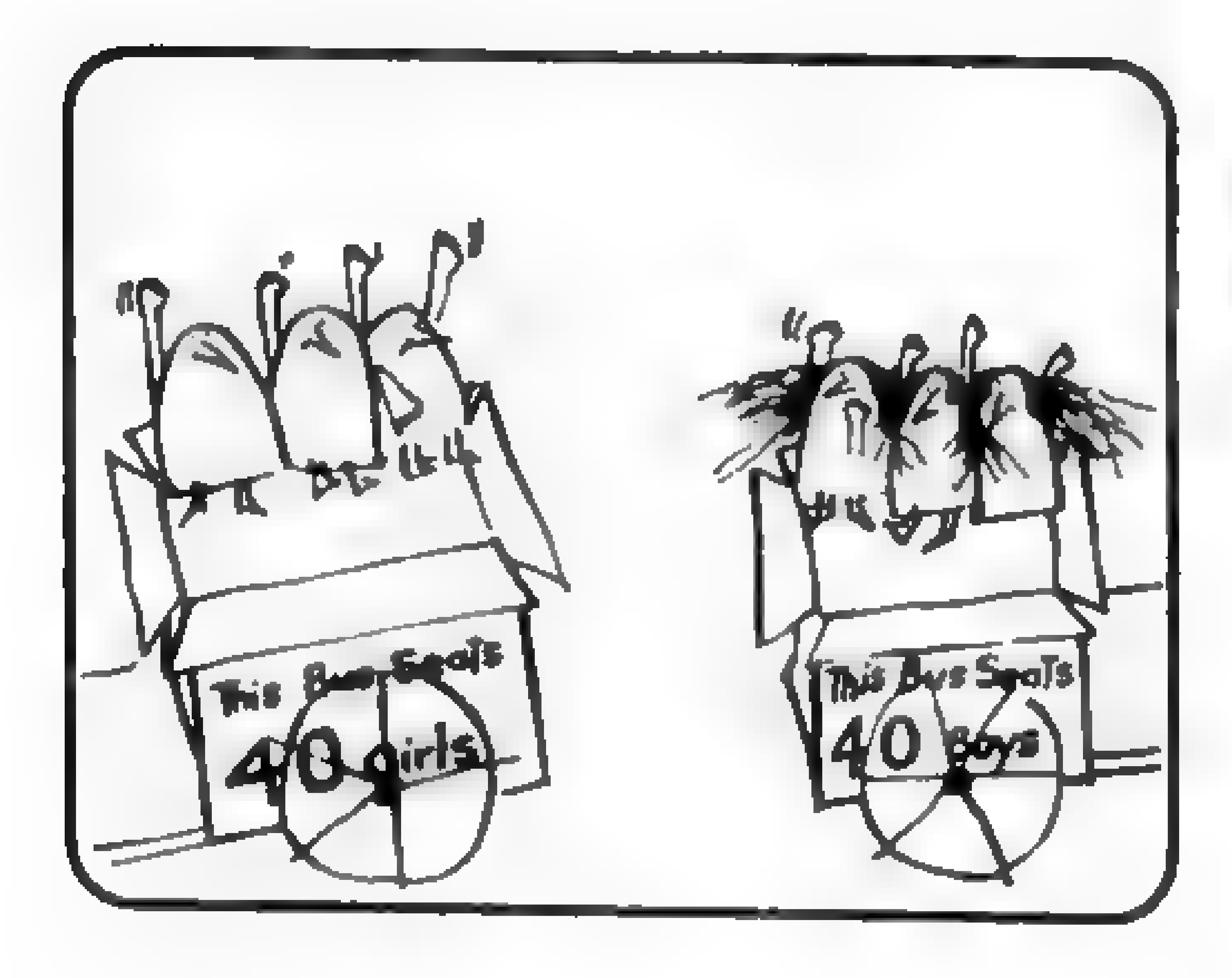


圖 9：其實不論圖 7 中那十名乘客的男女比例為何，兩部車上坐錯性別比例是完全相同的。很不可思議吧！

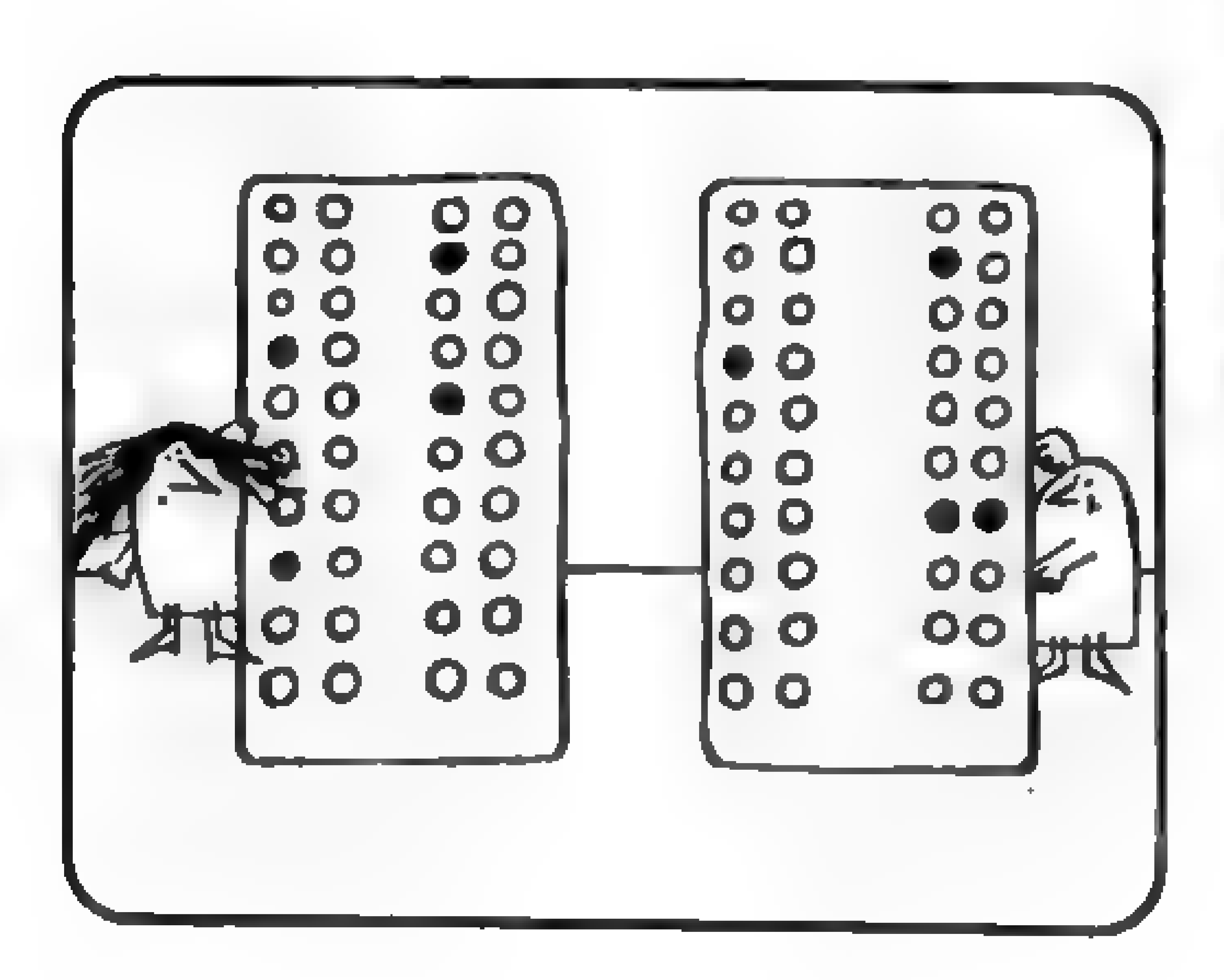


圖 10：為什麼呢？假設有四個男生坐到女生車上，那麼一定就有四個女生坐到男生車上。這個論證適用於坐錯的男孩。

以撲克牌來說明這個矛盾最清楚不過。首先把一副牌分成兩疊，紅、黑各二十六張，然後找人隨意選一疊切牌。如果他從紅的那疊拿了十三張放到黑的那疊裏，然後仔細洗這疊牌，再從這疊（隨意）拿回十三張到紅的那一疊。因此紅色的那疊等於也洗過了。

然後我們來算這兩疊牌，會發現在黑牌那疊中的紅牌張數，和在紅牌那疊中的黑牌張數完全一樣。這和圖中男女生坐錯車的人數相等，是一樣的道理。

魔術矩陣

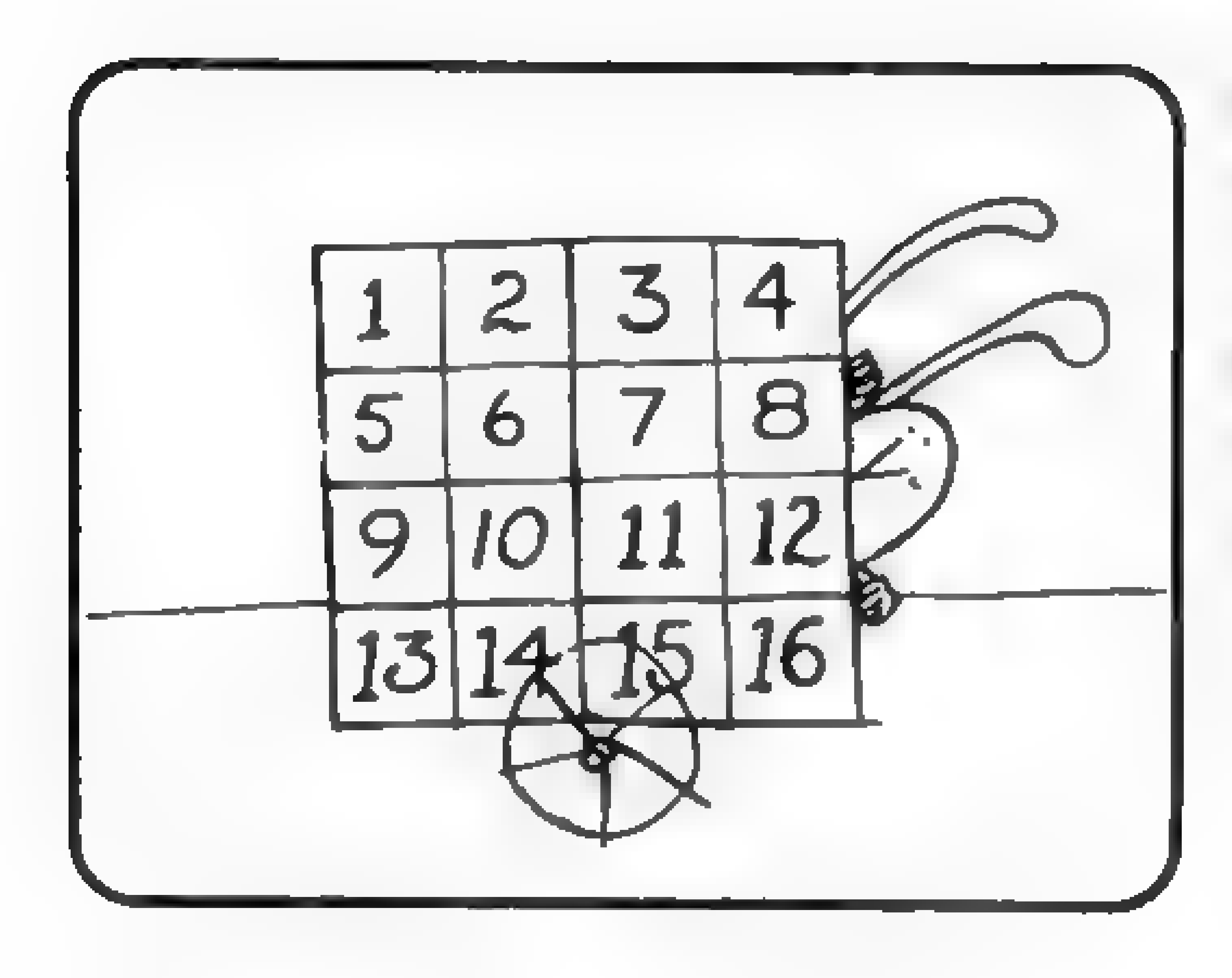


圖 1：在紙張上畫個和圖中一樣的四乘四矩陣，每個方格內塡上一到十六，然後我將表演讓你噴噴稱奇的超感能力一你在這矩陣內選出的四個數字，將都在我的控制之下。

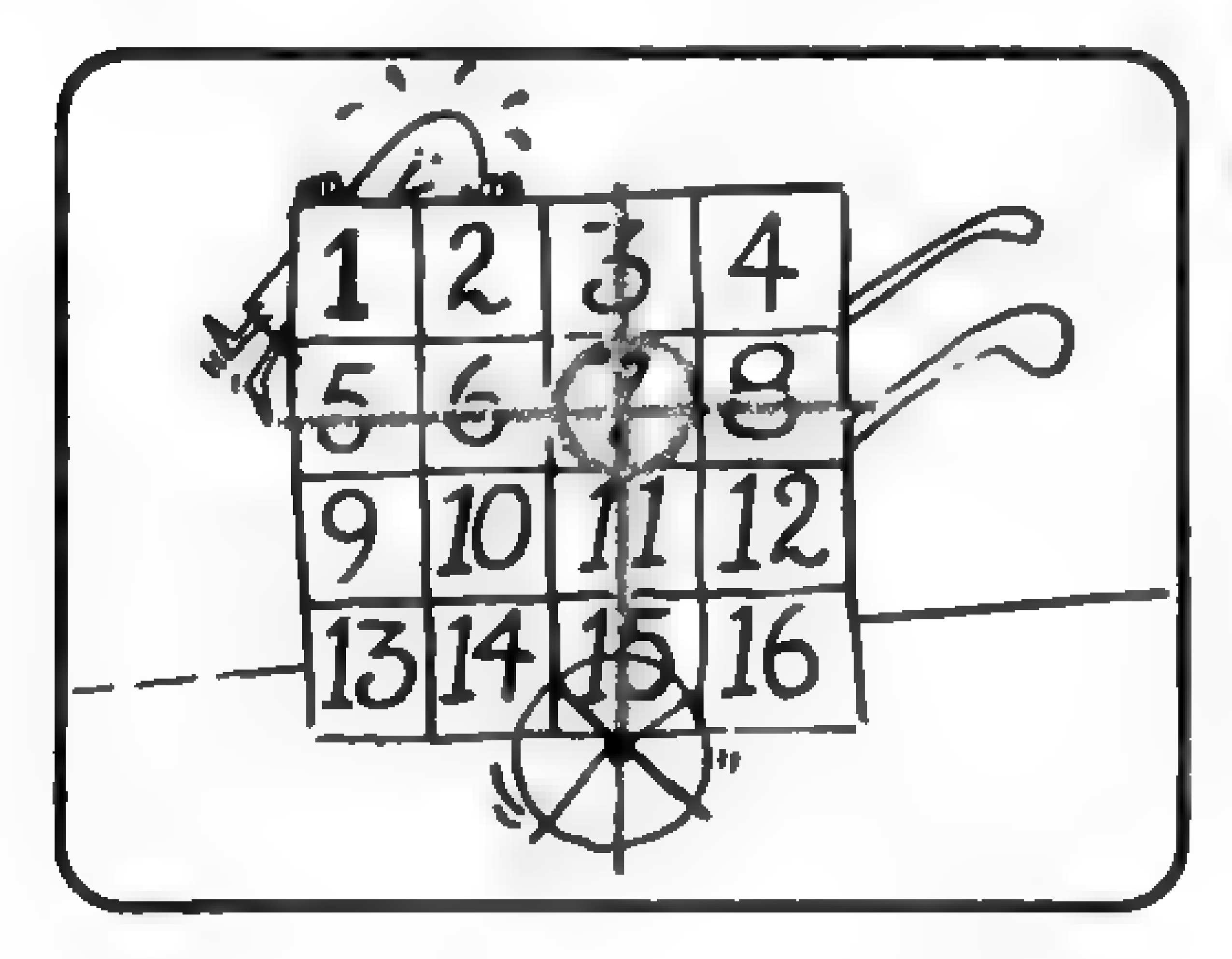


圖 2：在選好的數字上畫個圈，圖中選的是七，但是你可以任選一個你喜歡的數字。選好後，把包含此數字的行與列一併劃掉。

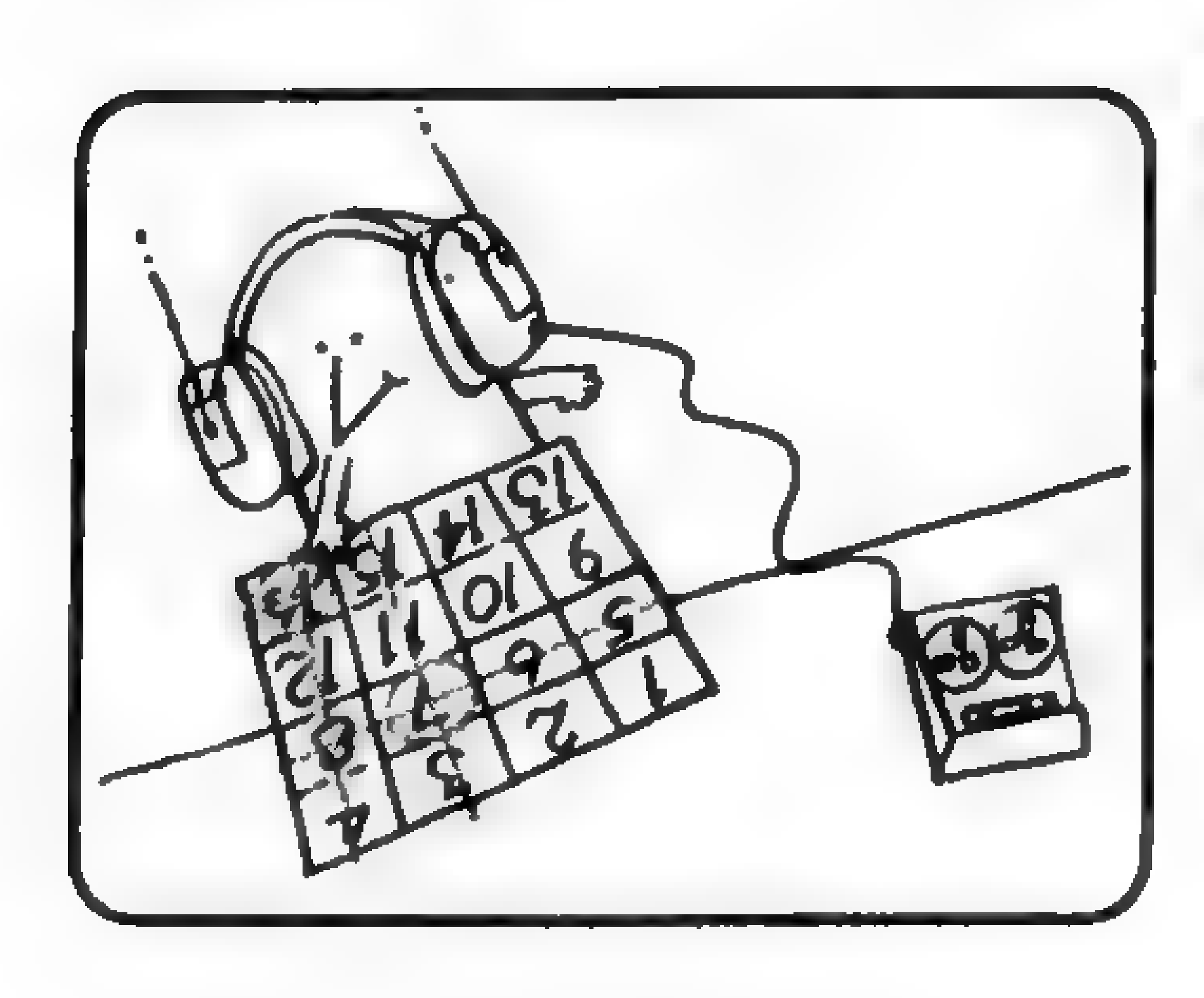


圖 3：在沒被劃掉的數字中選一個，然後再劃掉包含那個數字的行與列。接著在剩下的數字中選第三個數字，再如法炮製劃掉行和列。最後把剩下的唯一數字圈起來。

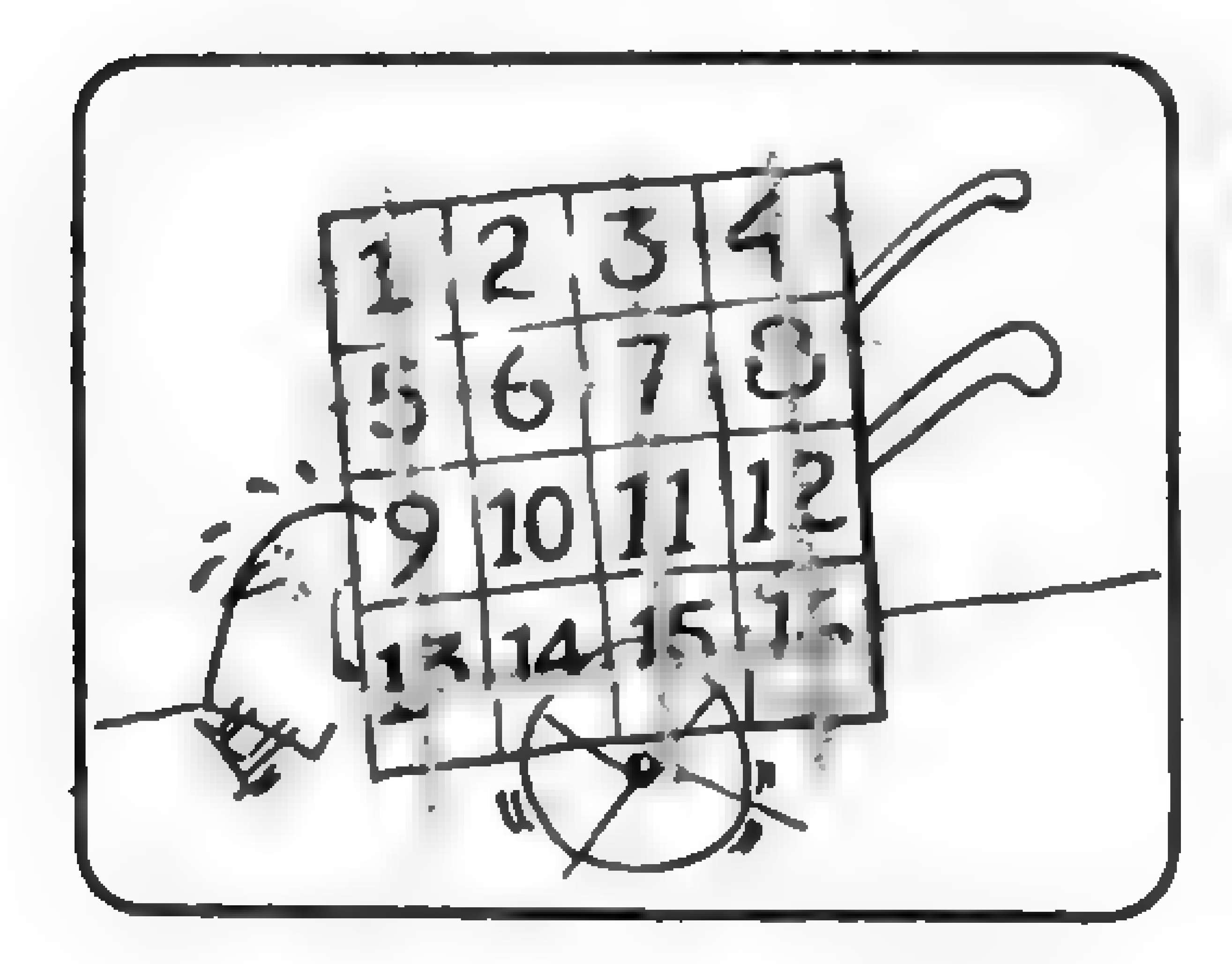


圖 4：如果你遵照指示做，你的矩陣會變成圖中的模樣。現在把圈起來的四個數字加起來。

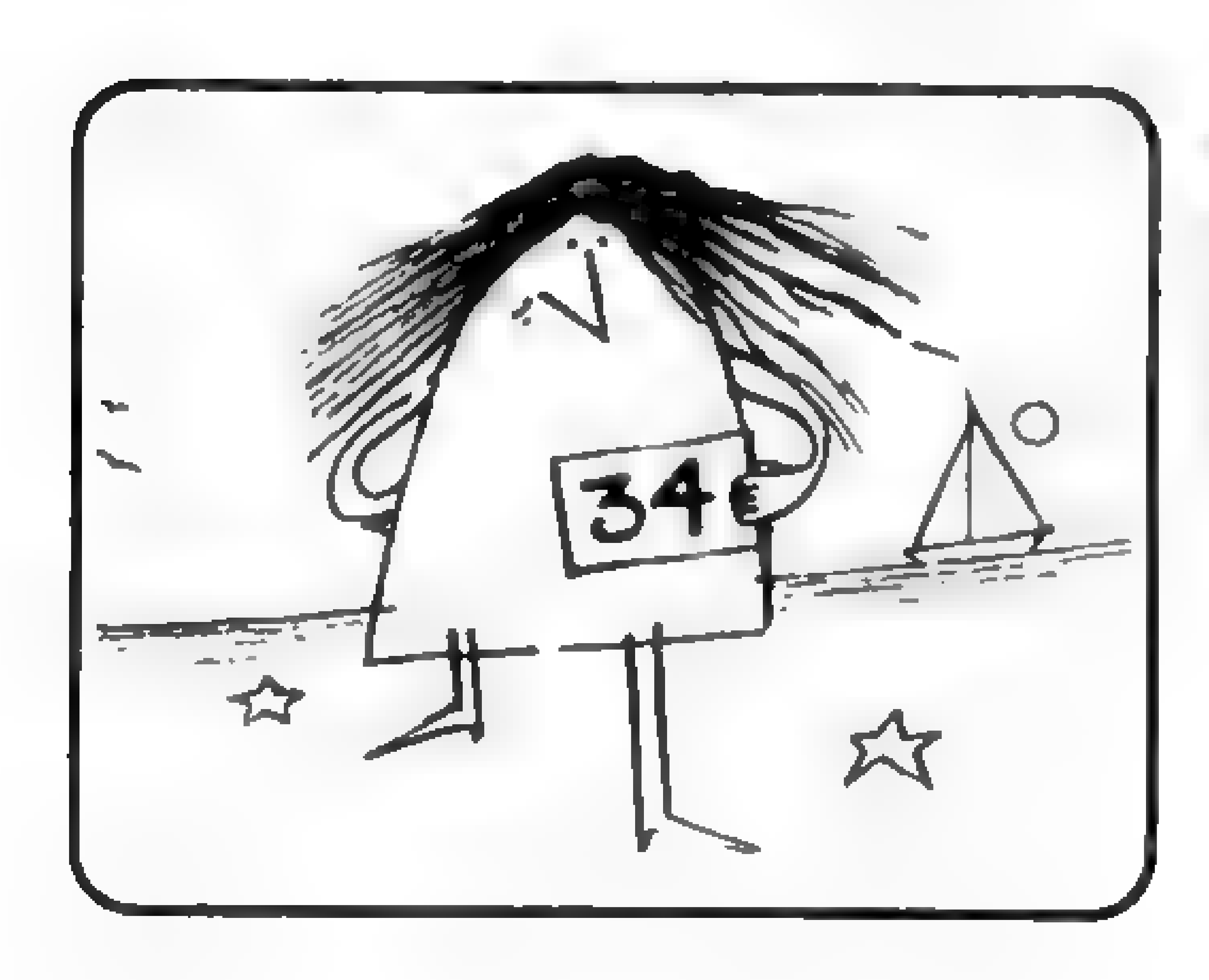


圖 5：準備好沒？我要公佈答案了，總和是……三十四！沒錯吧！我怎麼會知道的？我真的能影響你的選擇嗎？

	1	2	3	4
0				
4				
8				
12				

圖一

	1	2	3	4
0	1	2	3	4
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
12	13	14	15	16

圖二

	4	1	5	2	0	3
1	5	2	6	3	1	4
5	9	6	10	7	5	8
2	6	3	7	4	2	5
4	8	5	9	6	4	7
0	4	1	5	2	0	3
3	7	4	8	5	3	6

圖三

為什麼這個矩陣會讓我們任選的四個數字總和，永遠是三十四？秘訣很簡單，也很巧妙。把1、2、3、4寫在矩陣的上頭，把0、4、8、12寫在矩陣的左邊，如圖一。這八個數字可稱為這個魔術矩陣的基數(generators)。每個空格內的數字都是它那行與列的二個基數之和。把所有的方格填滿後，矩陣內的數字可從1順序數

到16，如圖二。

現在我們看看依照上述過程圈選出的四個數字，結果會如何。在規定的圈選過程中，沒有兩個圈選數字會在同行或同列，每個數字都是唯一一對（行與列）基數的和。所以選出的四個數總和，就等於八個基數的總和。由於八個基數加起來等於三十四，所以那四個數字的總和就是三十四。

你洞悉這個矩陣的秘訣後，就能列出任何大小的魔術矩陣。試看圖三的六乘六矩陣，有十二個基數。請注意這裏的基數並未照順序排列，因此方格內的數字看起來像隨便塡的，如此掩飾了矩陣的結構，也因而更顯得神奇。這個矩陣的基數總和是三十，也就是選出的數字總和。你可以隨便變換數字。可是魔術矩陣內的數字可以是負數嗎？當然可以。事實上，基數可爲正數或負數，甚至有理數或無理數。

可以作出一個魔術矩陣，其中圈選出的數字不求總和，而是求其相乘的積嗎？可以的，這會導出另一種方式，不過基本的架構是完全相同的。在這種情況下，最後的答案等於是全部基數相乘的積。

古怪的遺囑

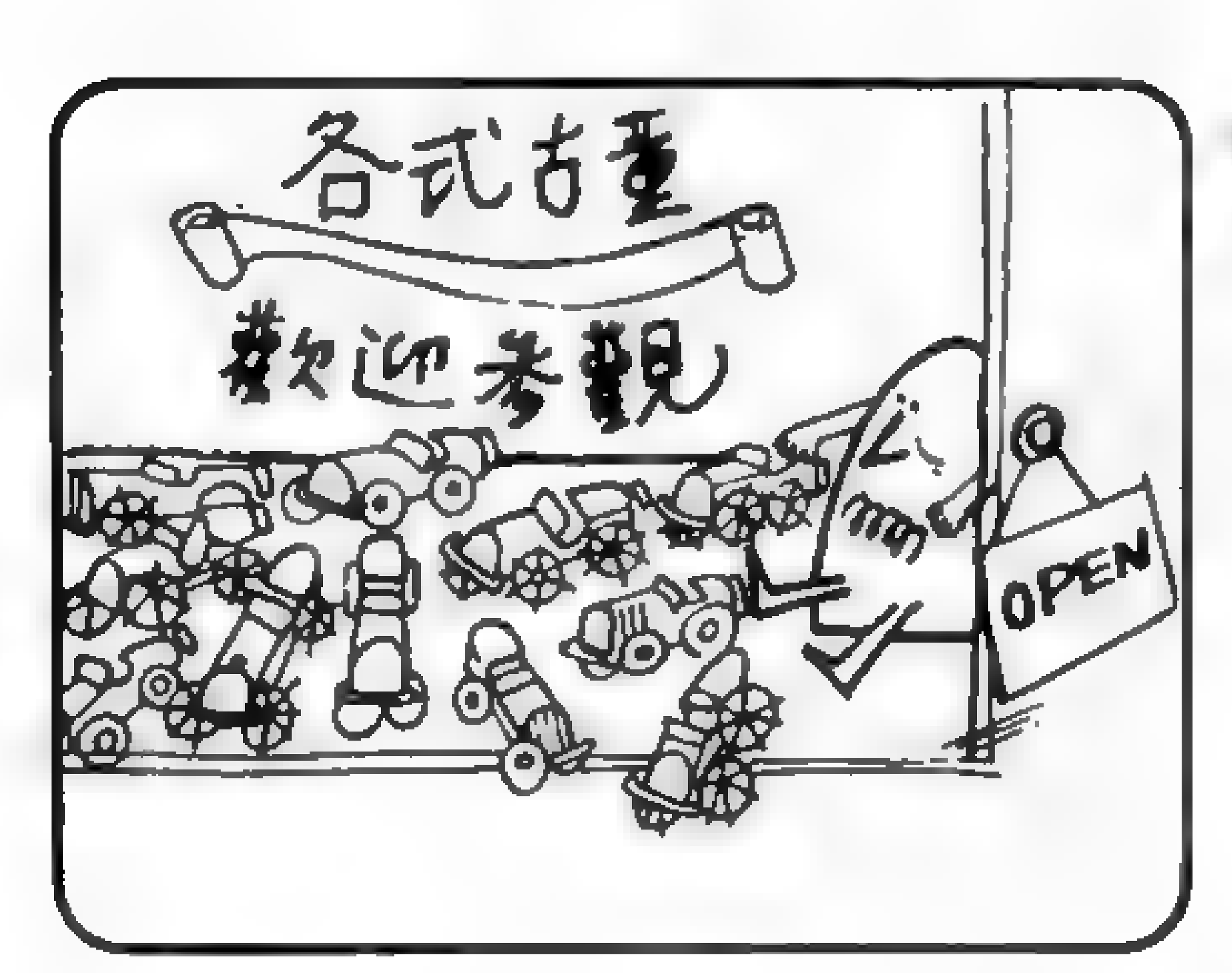


圖 1：一位有錢的律師，擁有十一部古董車，每部價值約二萬五千美元。

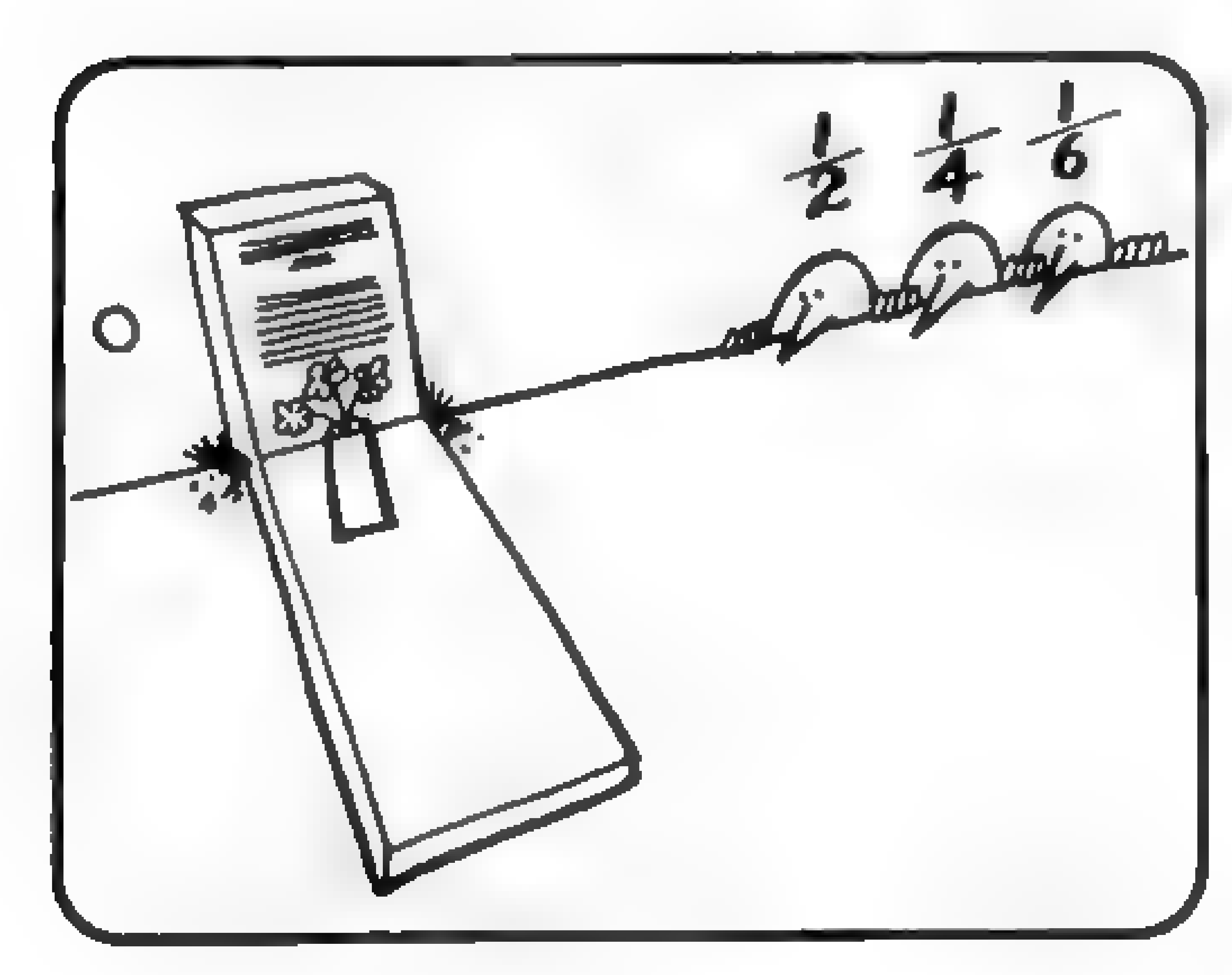


圖 2：律師死後，留下古怪的遺囑：把十一部車分給三個兒子，其中所有車的二分之一給大兒子，四分之一給二兒子，六分之一給小兒子。

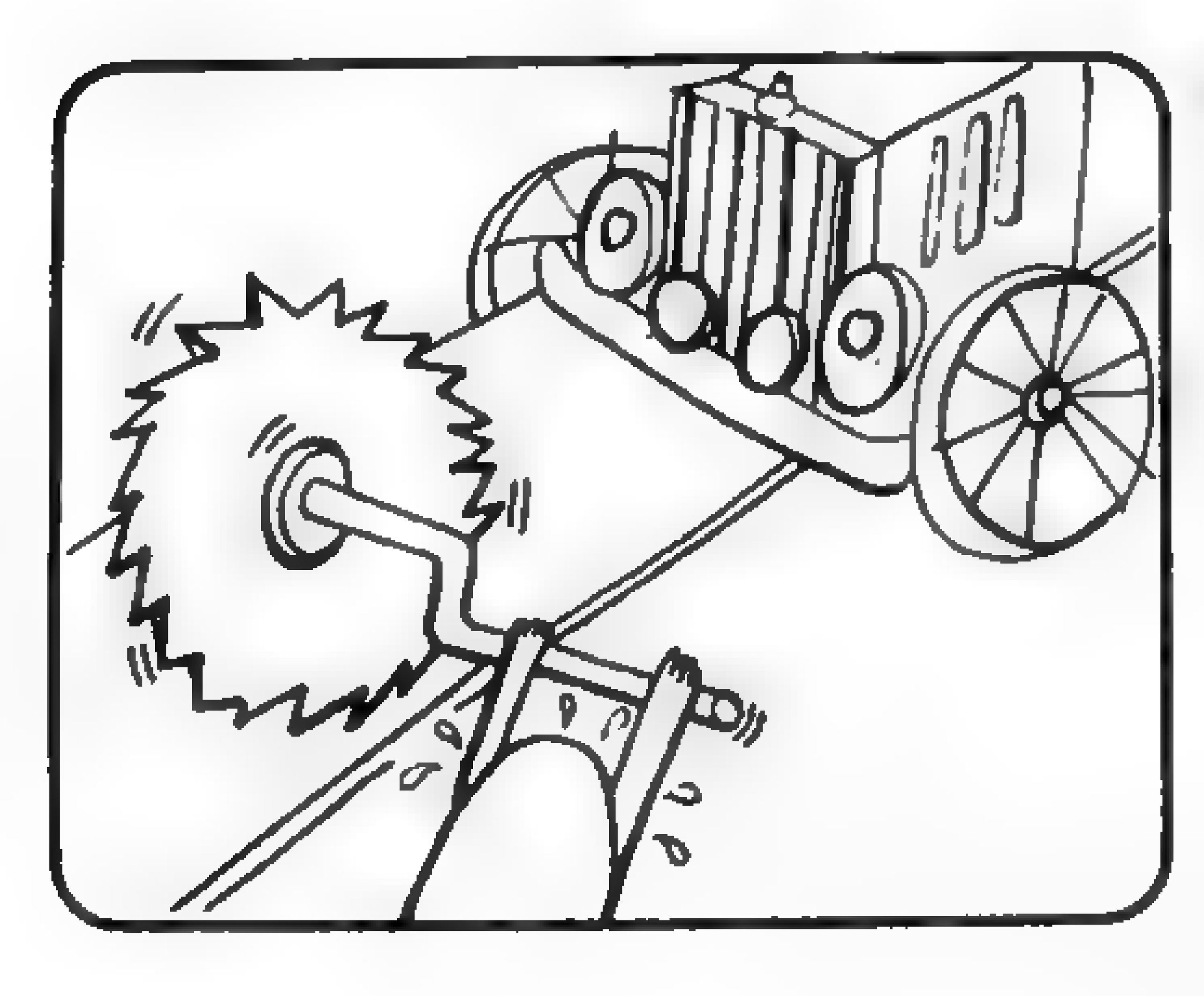


圖 3：大家都很奇怪，十一部車怎麼能均分成二等分？或四等分、六等分？

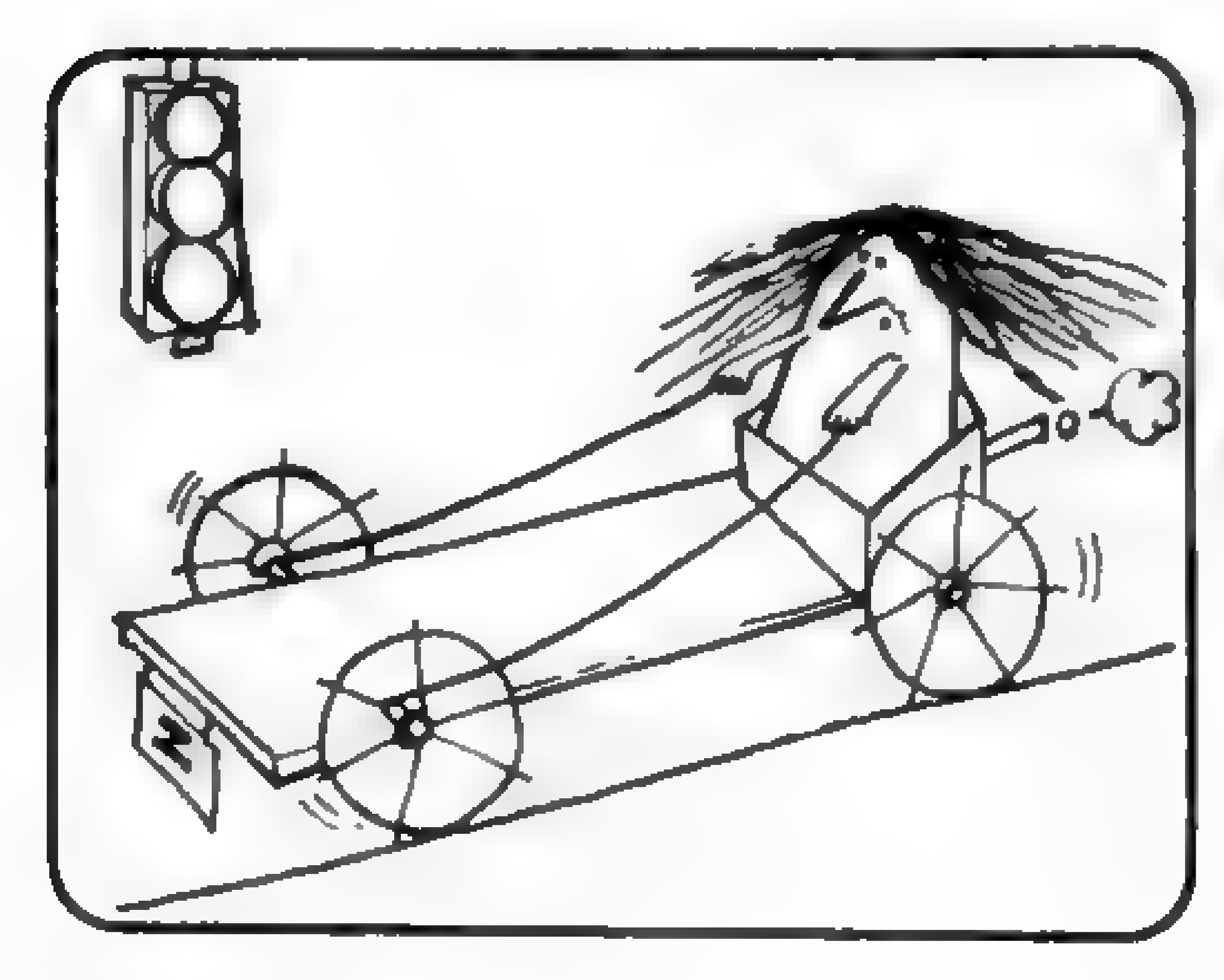


圖4：當三個兒子正在討論該怎麼辦時，一位有名的數字學家零蛋小姐駕著她的新車經過。她說：「大家好。爲什麼大家都面帶愁容，需要我幫忙嗎？」

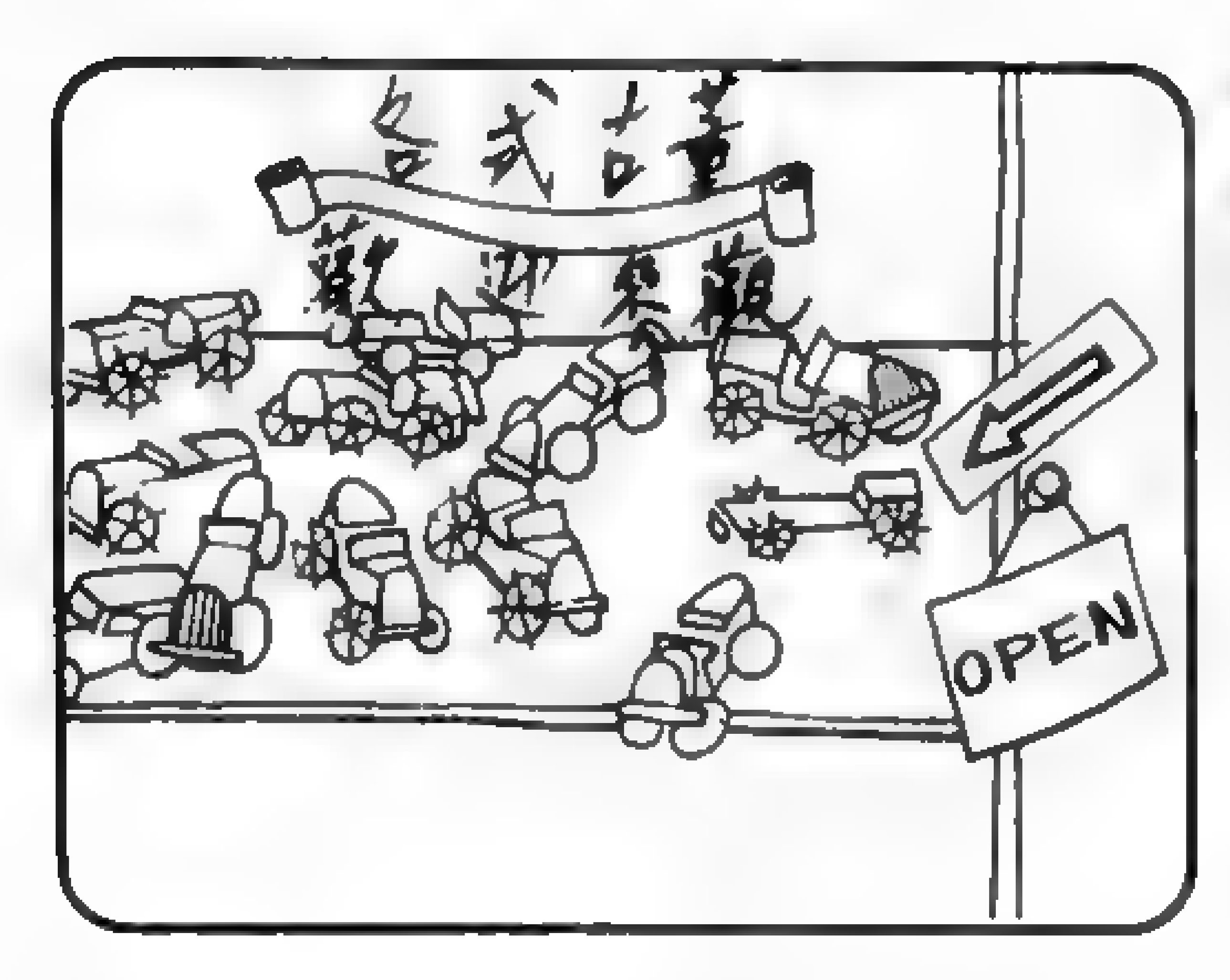


圖5：三個兒子跟她說明來龍去脈後，零蛋小姐把車停到那十一部車旁邊，然後跳下車說：「現在，這兒一共有多少部車啦？」兒子們數了數說：「十二部。」

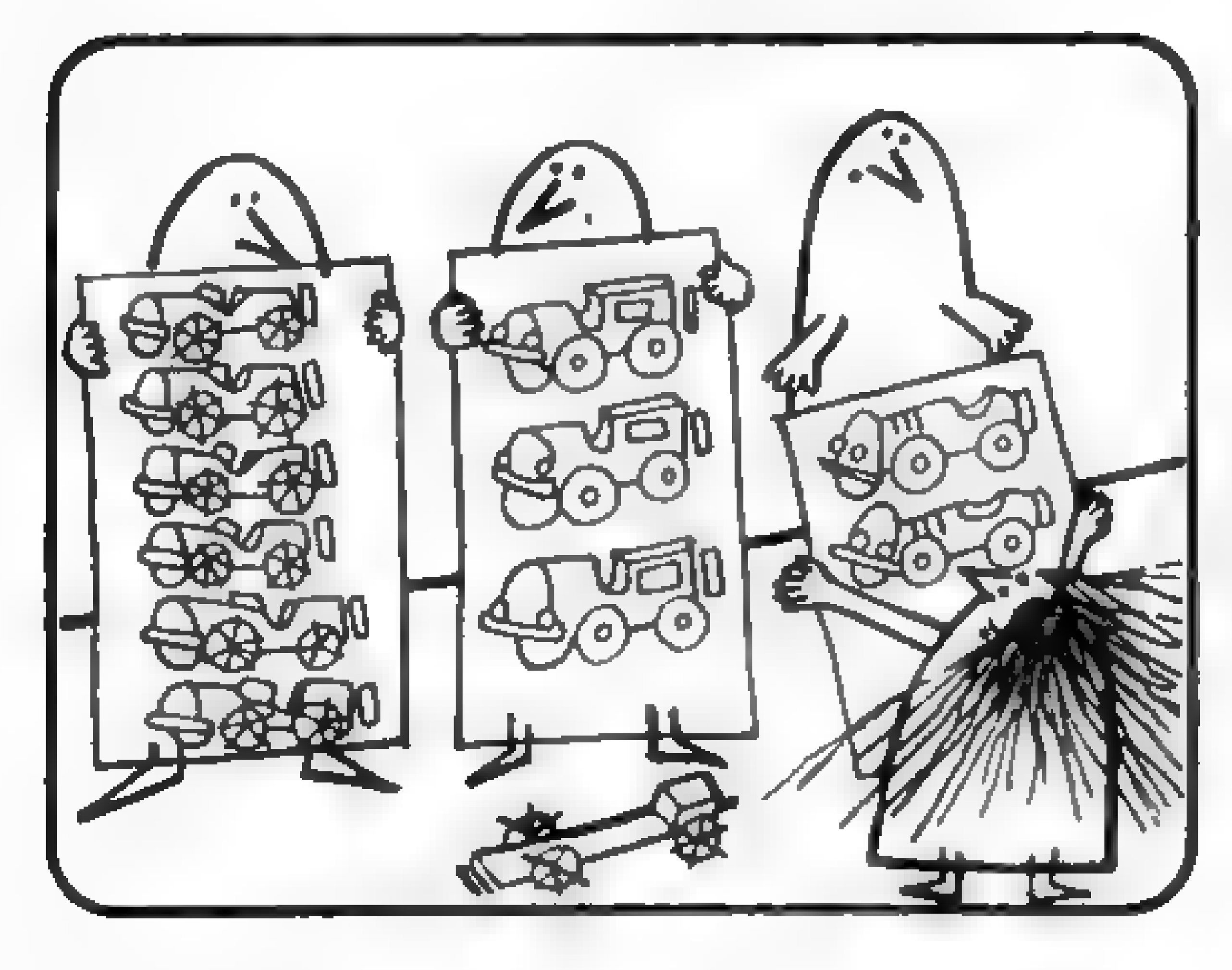


圖6：接着零蛋小姐就遵行遺囑所言，把所有車子的一半，即六部車分給大兒子；四分之一，即三部車分給二兒子；六分之一，即兩部車分給小兒子。她說：「六加三加二剛好是十一，所以還剩下一部車，那就是我的車。」

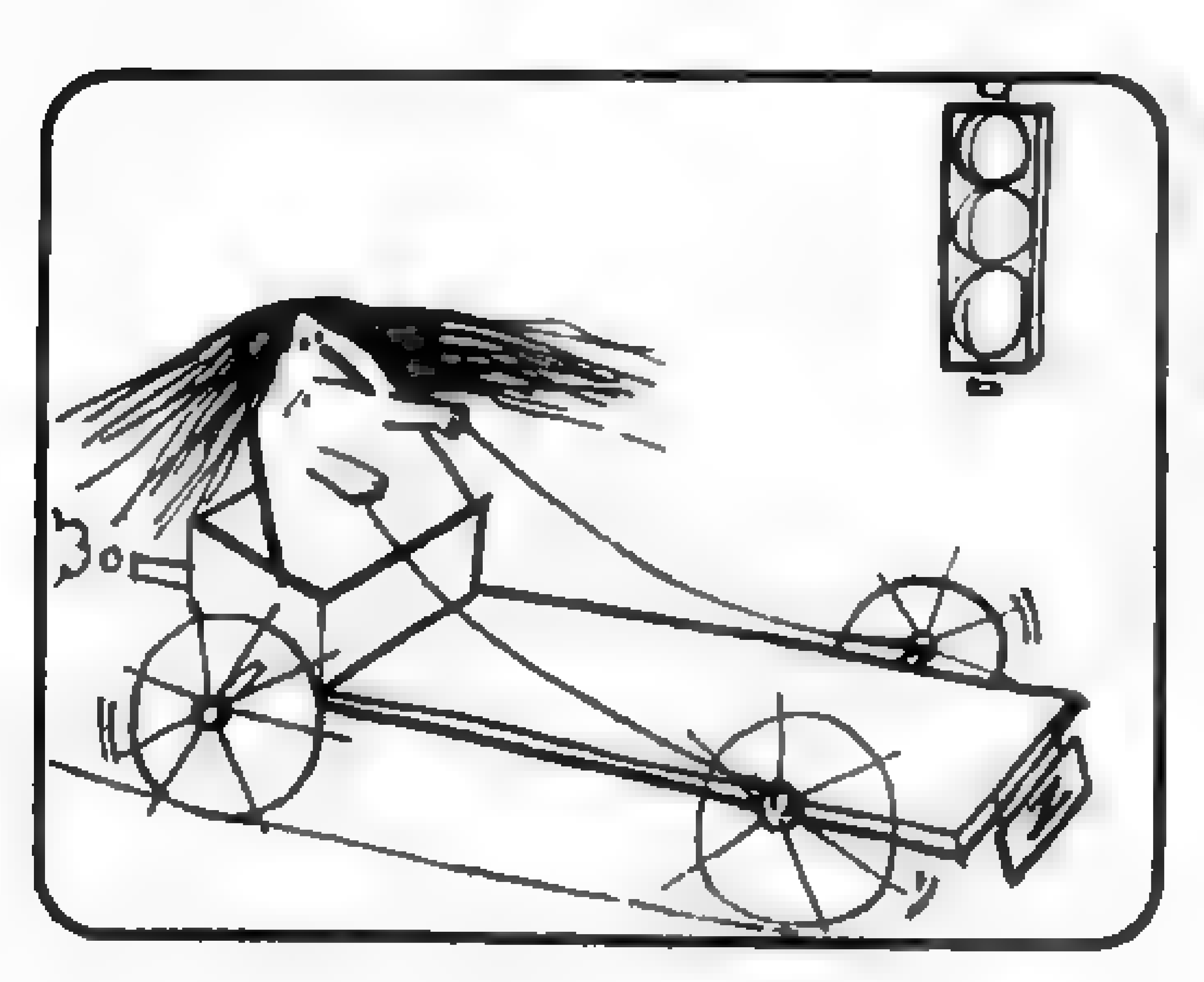


圖7：零蛋小姐就跳上她的跑車開走了，臨走丟下一句話：「我一向樂於助人，孩子們，我會把帳單寄給你們的。」

這是老式阿拉伯矛盾(Arabian Paradox)的新解，不過在阿拉伯的故事中，用的是馬而非車子。你可以任意更改遺囑中的分數比例和車子數目。只要車子數目加上一就能除盡遺囑中的分數，並且照遺囑分完後，還剩下一部車可還給借車的人。

如果有n部車，而三個分數是1／a，1／b和1／c，會導出以下的方程式：

$$\frac{n}{n+1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

唯有在這個方程式的解都是正整數時，這個矛盾才存在，例如十七輛車借一輛車後，可以分成二分之一、三分之一、九分之一。

原來遺囑中的分配比例，總和要小於1，這個矛盾才有解。如果眞的照遺囑吩咐，把十一部車按比例分割，最後會剩下十二分之十一部車。零蛋小姐提供的方法可把那剩下的十二分之十一部車分配給每個兒子，於是大兒子比原來分到的多得到十二分之六部車；二兒子多得十二分之三部車；小兒子多得十二分之二部車。這些

多分到的總和是十二分之十一部車，且每人分到的車數也因此變成整數，所以不需眞的去分割車子。

奇異的密碼

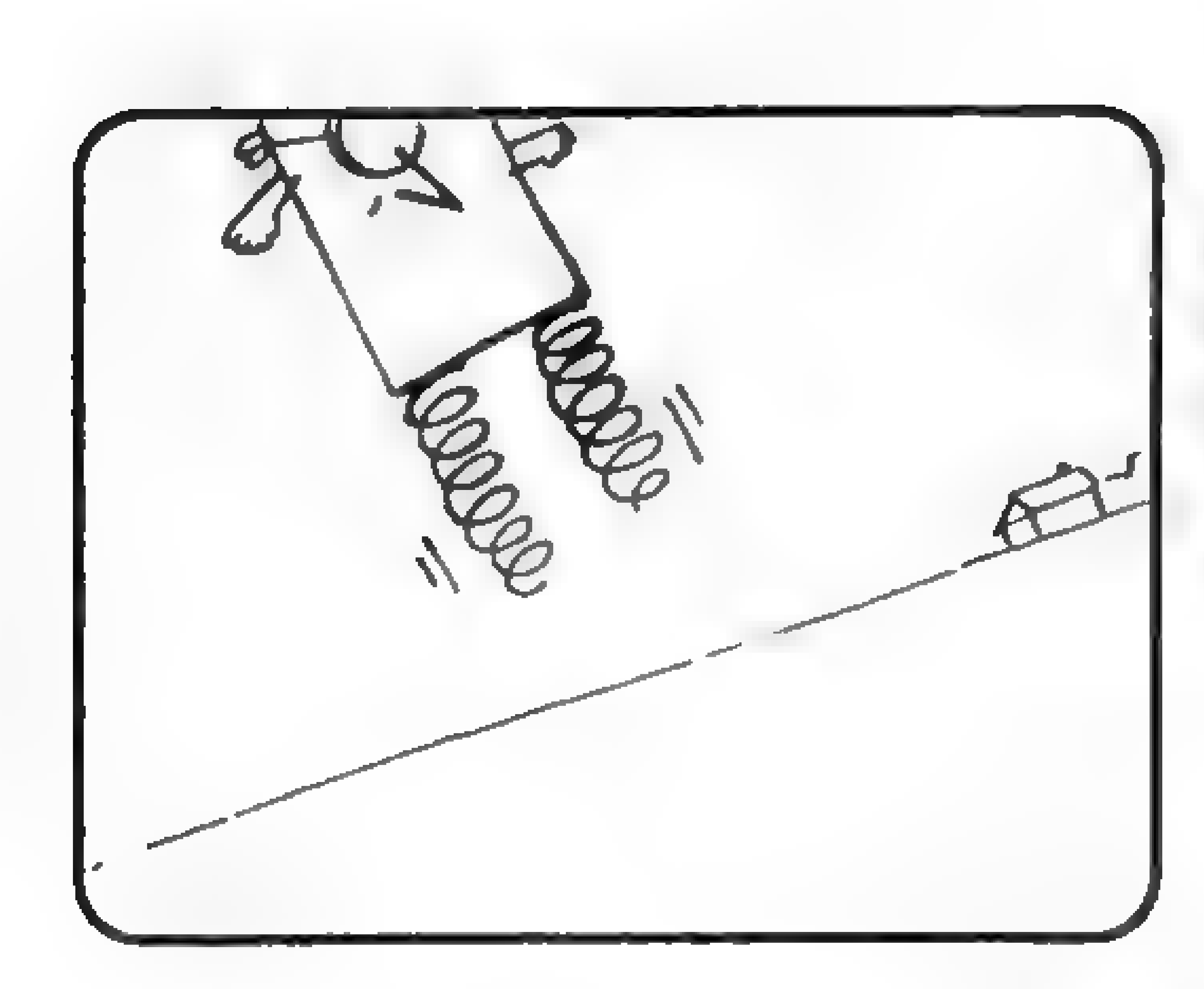


圖1：樂他博士是位科技學家，來自另一個時空的銀河系—蝸牛星系。有天他為了蒐集人類的情報，來到地球拜訪。美國科學家赫曼負責接待他。

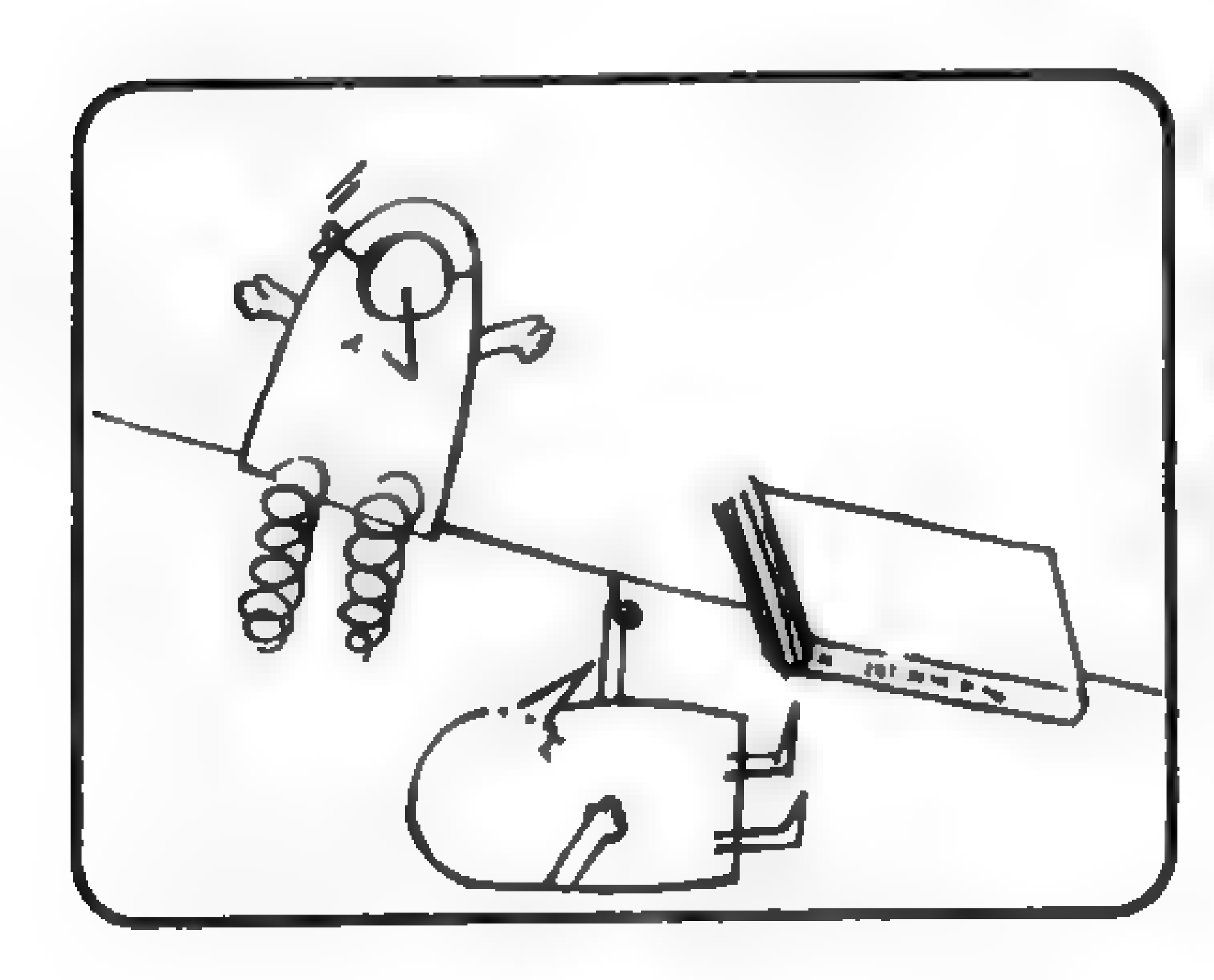


圖2：赫曼：「你為什麼不乾脆帶一套大英百科全書回去？我們所有知識的摘要都在裏頭。」
樂他博士：「很棒的主意，赫曼。不過那麼重的大部頭書，我可沒辦法帶走。」

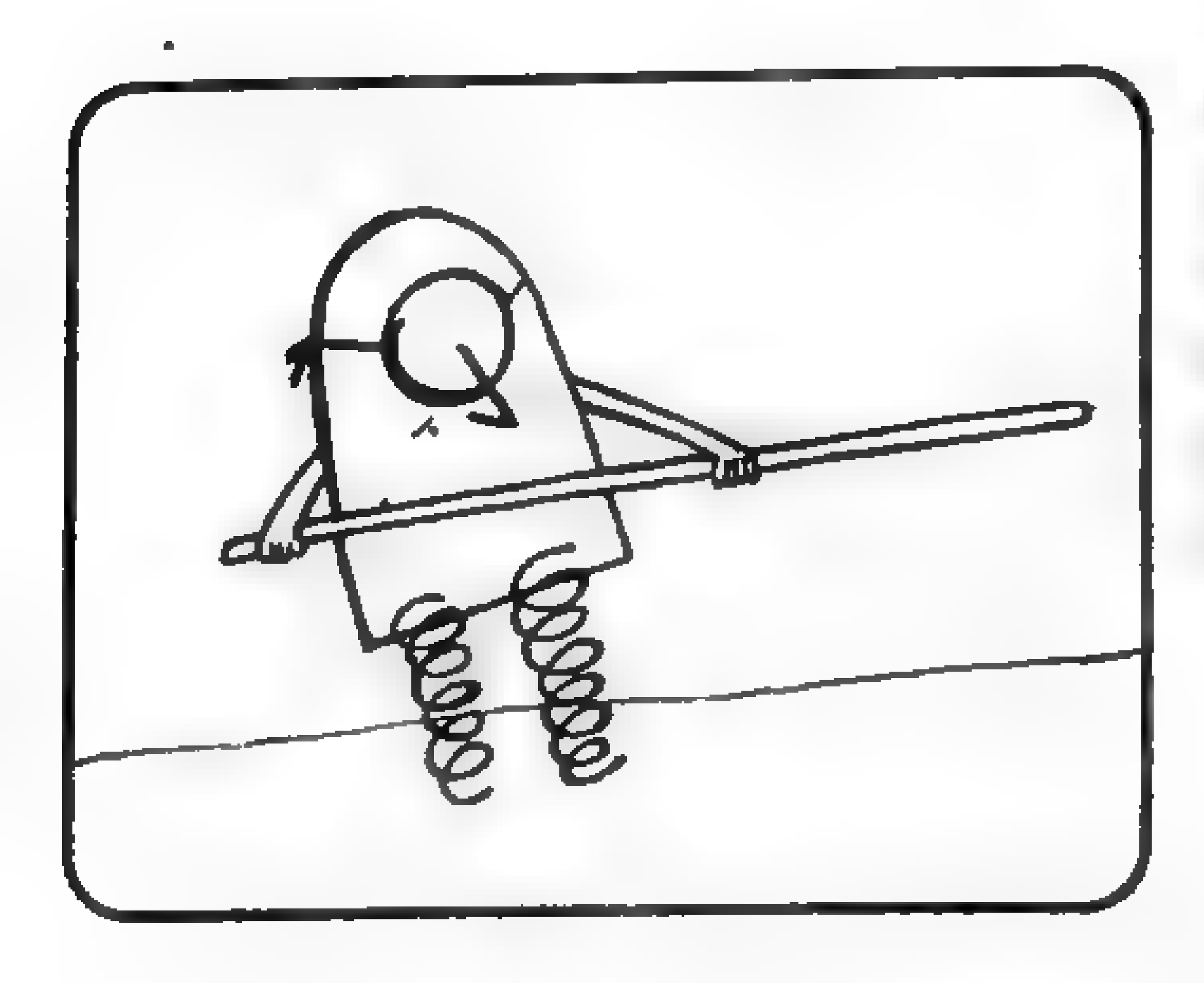


圖3：樂他博士：「不過我能把整套百科全書編成密碼，記錄到這根金箍棒上，只要在棒上作個標記就成了。」
赫曼：「愛說笑！一個小小的標記，怎麼可能收藏那麼多資訊。」

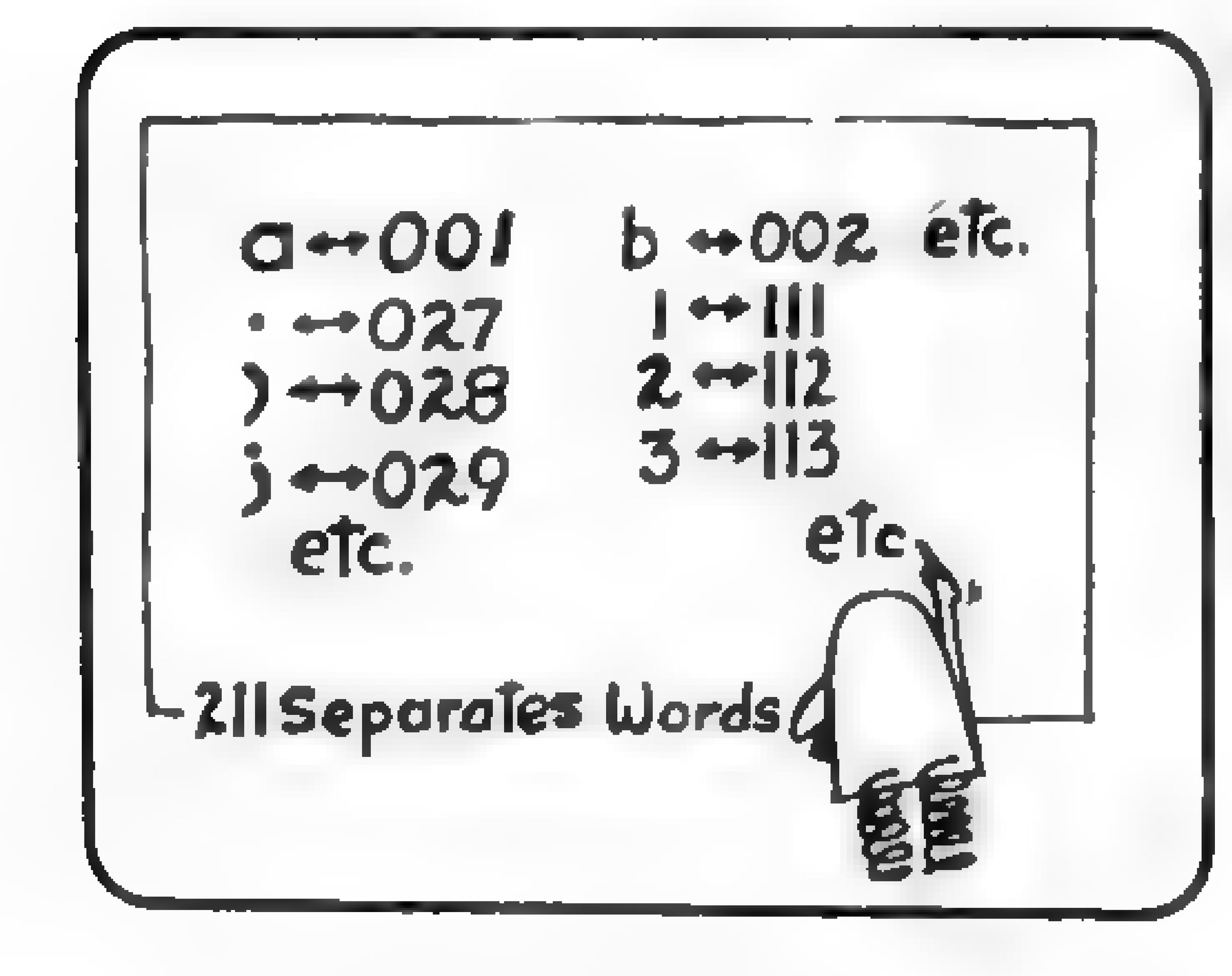


圖 4：樂他博士：「親愛的赫曼，你們百科全書內的各種字母和符號，基本上一共不超過一千個。所以我就把每一個字母或符號編上號碼（〇〇一到九九九），每個號碼都用三個數目字代表。」

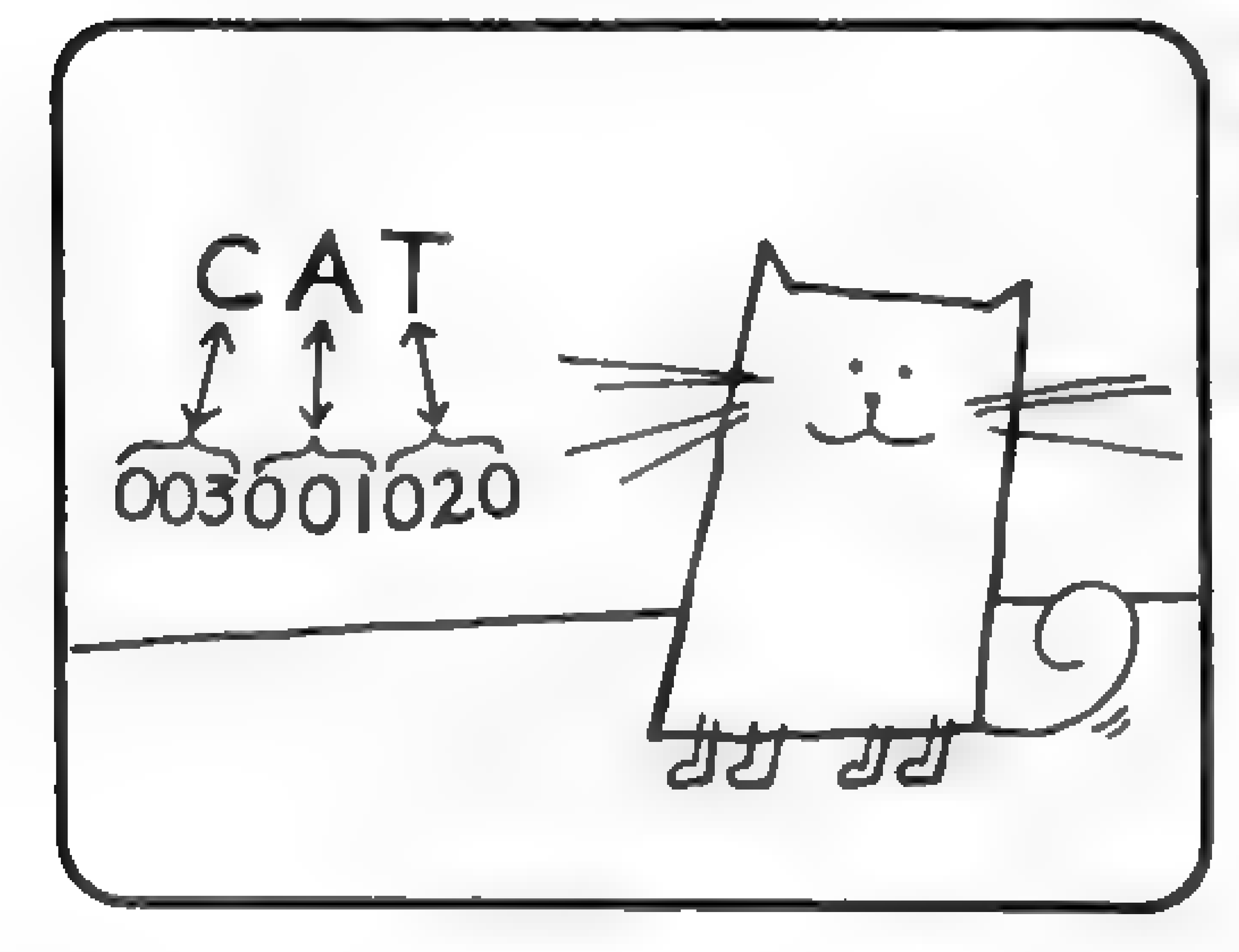


圖 5：赫曼：「我不懂，你怎麼用密碼表示「CAT」這個字？」樂他博士：「很簡單，用我剛才說的方法，CAT 的密碼會變成「〇〇三〇〇一〇二〇」。」

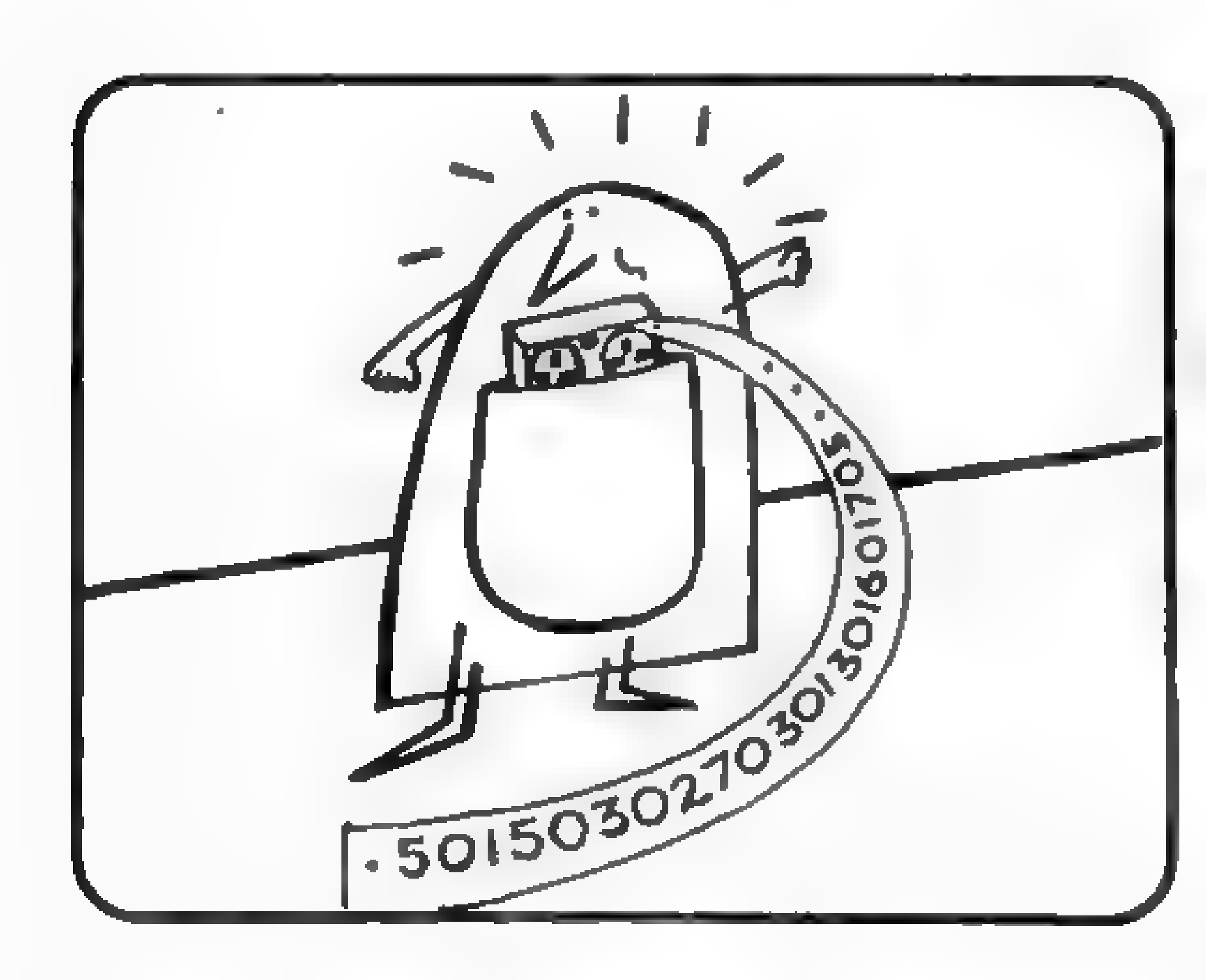


圖 6：樂他博士用超級的口袋型電腦，快速掃瞄過百科全書，把所有的內容，譯成龐大的數字。然後在數字前加個小數點，這個數字就變成小數。

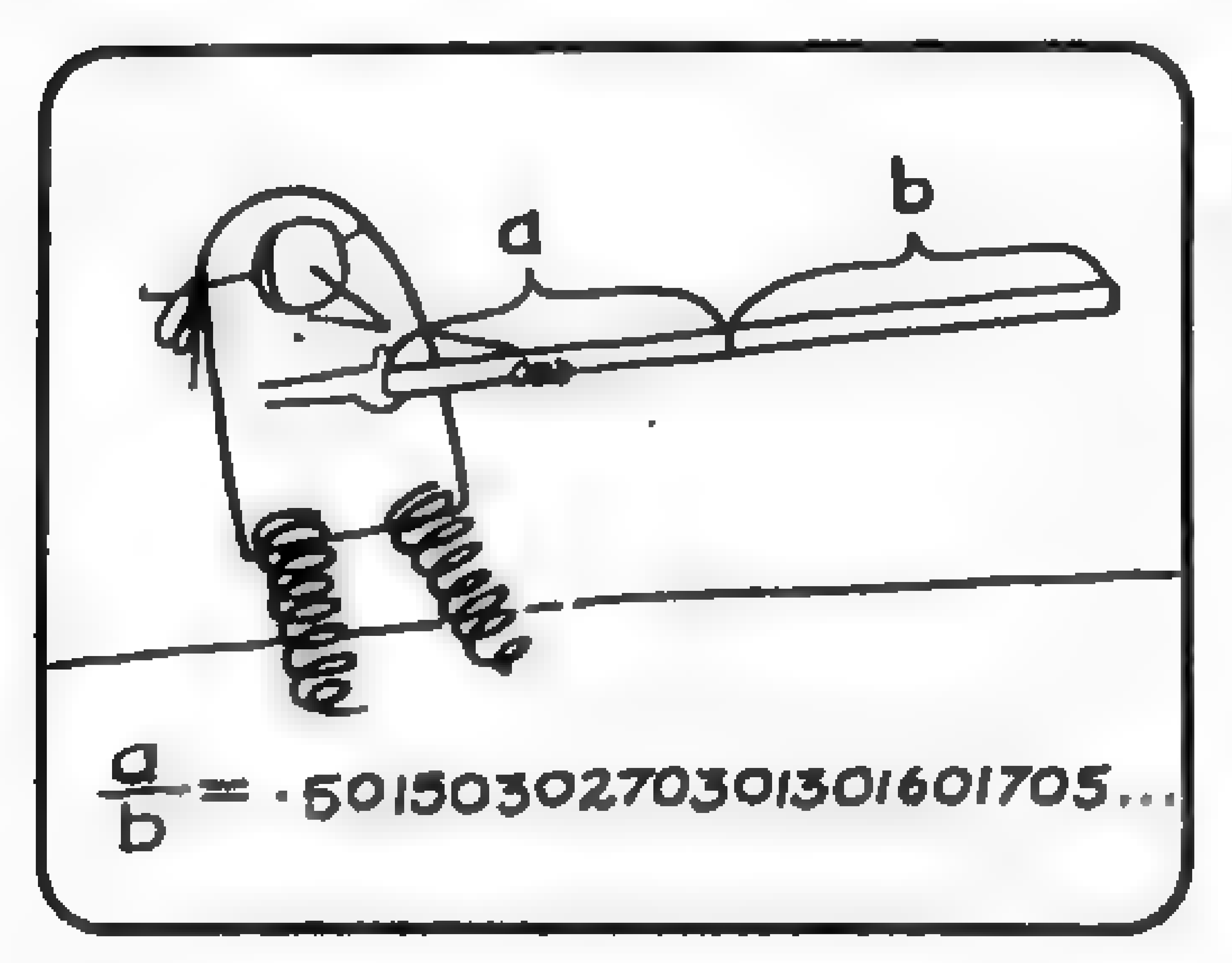


圖 7：樂他博士於是在金箍棒上劃個標記，把金箍棒精確的分成 a 和 b 的長度，讓分數 a/b 等於密碼上的小數。

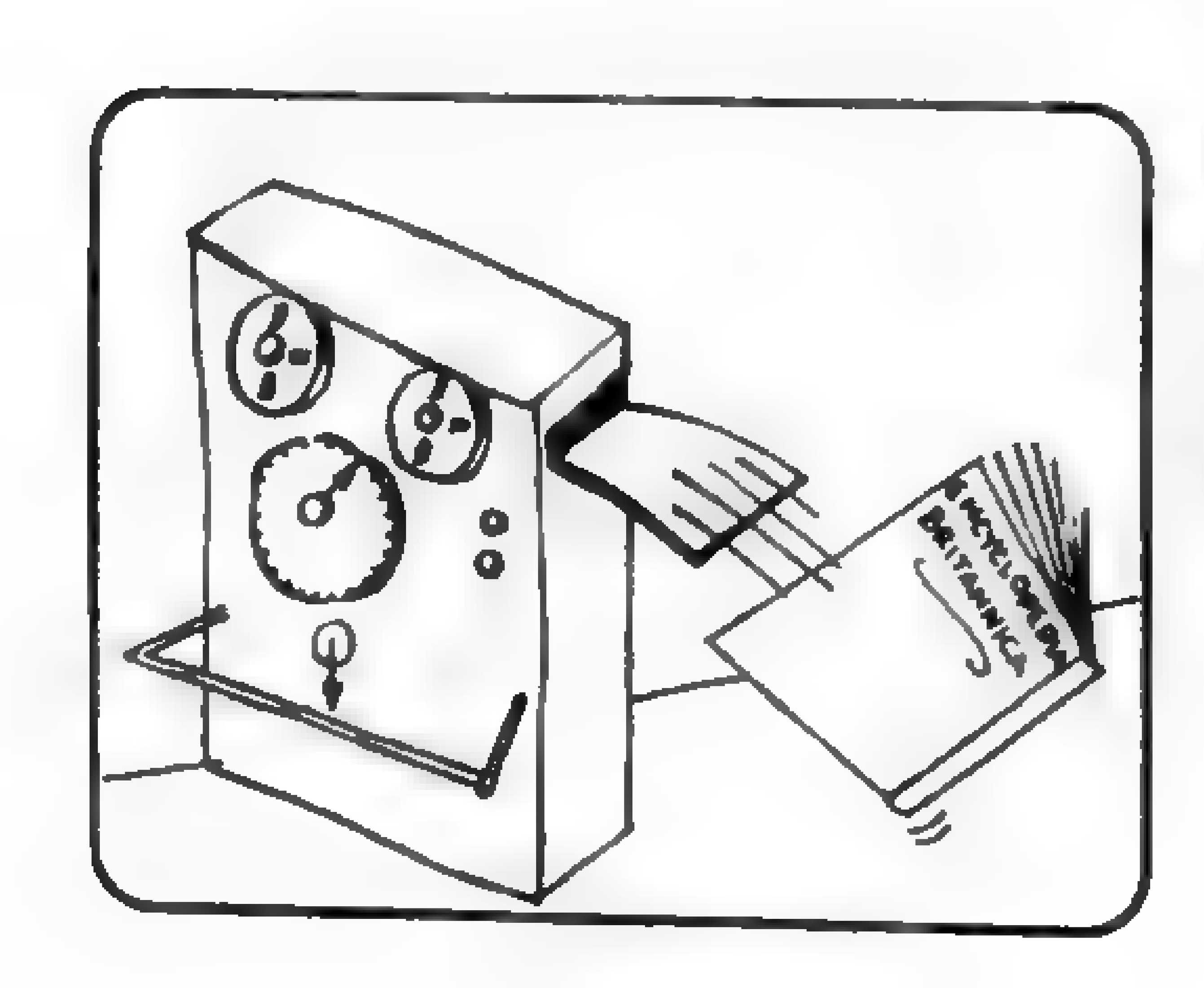


圖 8：樂他博士：「等回到我的星球後，我會用電腦精確的測量出 a 和 b，再算出 a／b，然後把得到的小數解碼，電腦就能把你們人類的百科全書印出來了。」

即使你對密碼並不熟悉，你也一定迷上類似的編碼和解碼的遊戲—把一些簡單的訊息，以數字密碼表示出來。密碼說明了一對一的對應關係的重要性，以及把一種結構轉換成另一種結構的方法。

把整部百科全書變成密碼，標成金箍棒上的一點，只是理論上可行，實際上是行不通的。問題出在要標示那一點所需的精密度非人力所及，因爲那一點比一個「電子」還要小得多，而a和b兩段長度的測量，也必須同樣精確。如果我們假設，測量兩段長度的精確度足以得出樂他博士的分數，那麼他的方法當然就可以行得通。

無限旅館

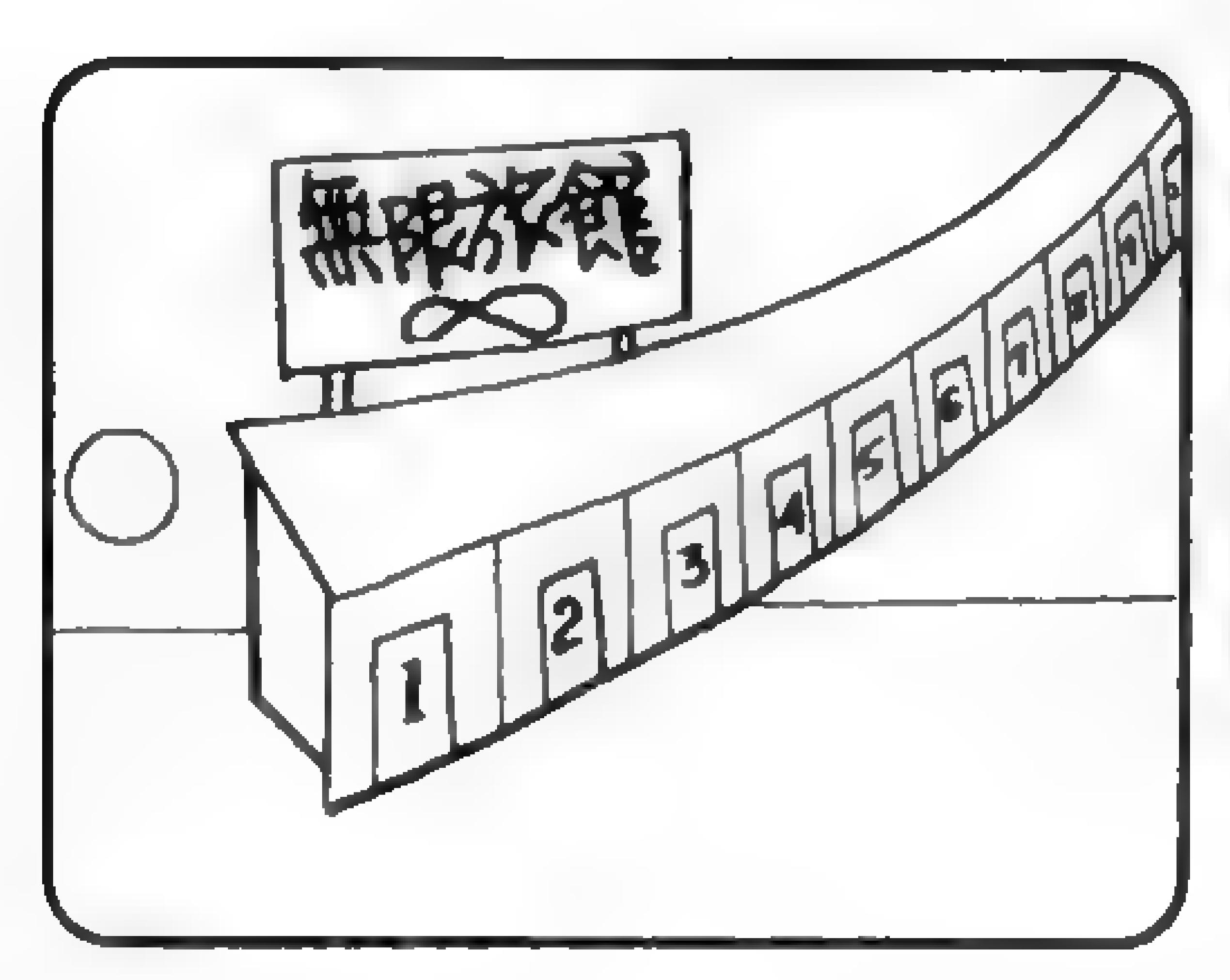


圖 1：樂他博士臨走前，講了一個很絕的故事，他說：「我們星河的中心有家很大的旅館—無限旅館，它的房間有無限多個，而且通過黑洞，延伸到更高的另一度空間中。房間號碼從一開始一直下去。」

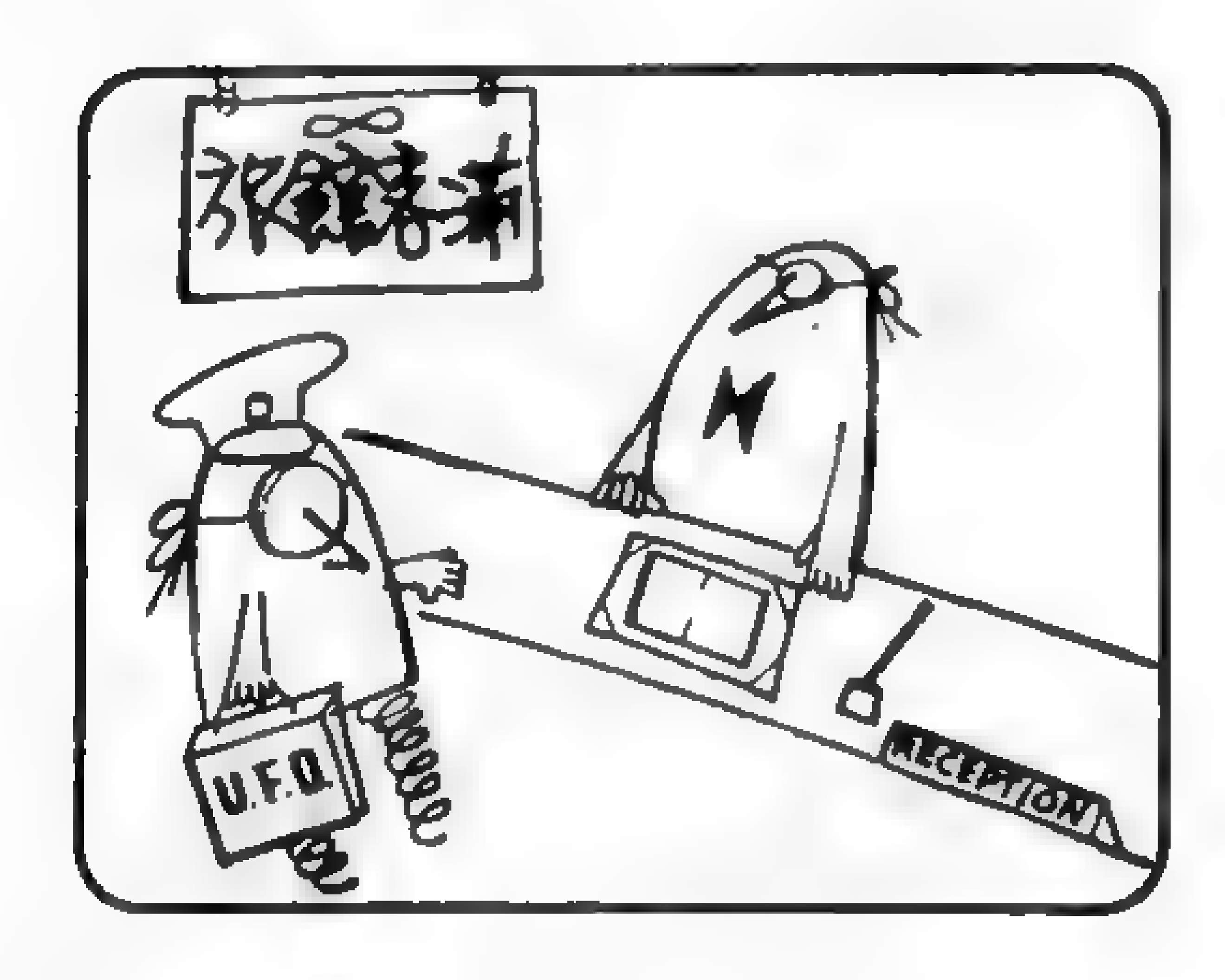


圖 2：樂他博士接著說：「有一天，所有房間都客滿，來了位飛碟駕駛員，他正好路過此地。」

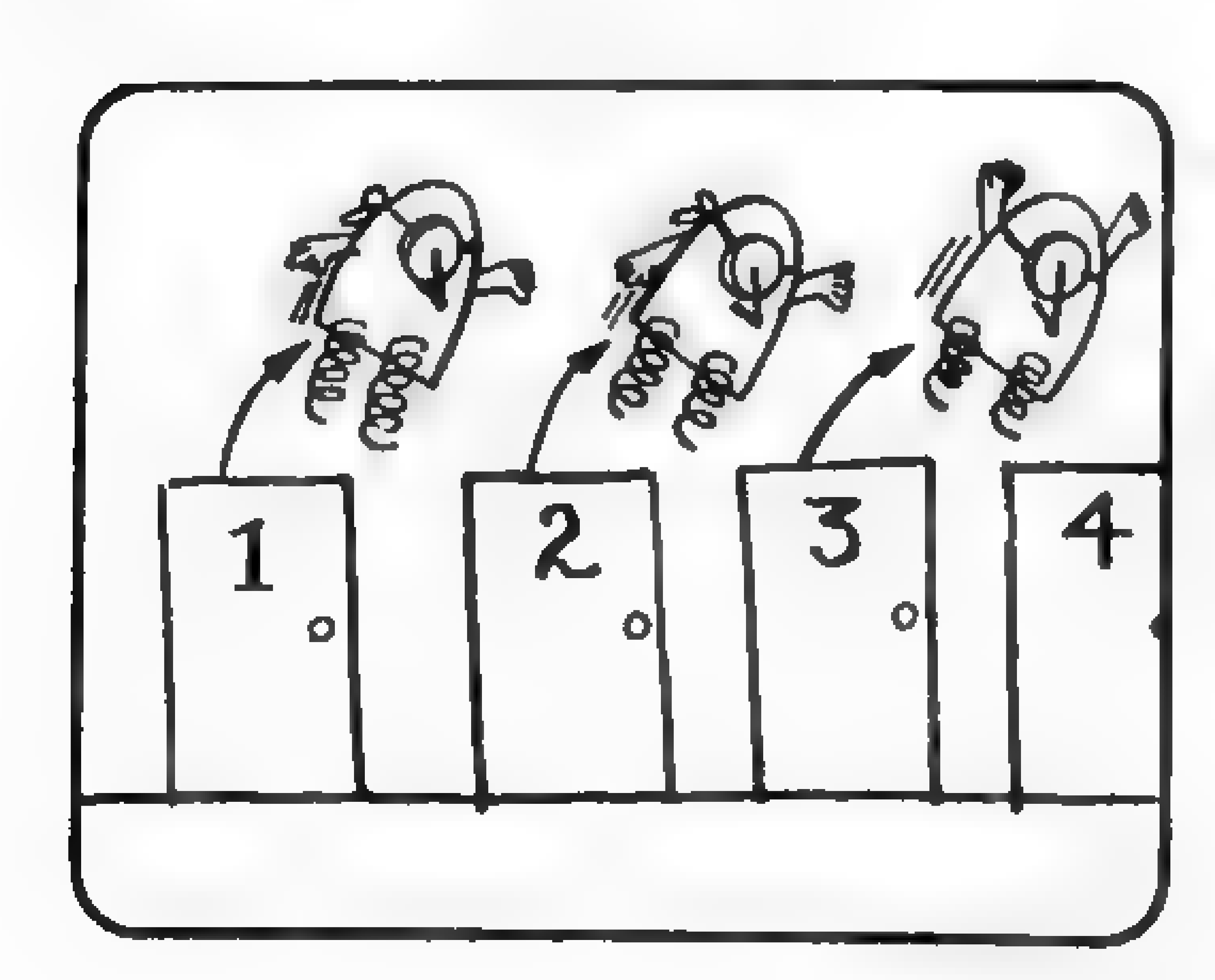


圖 3：樂他博士：「雖然房間客滿，旅館經理仍替這位駕駛找出一間空房間。他只消把每個房間的房客，移到下一個房間，就能空出一號房給這位駕駛。」

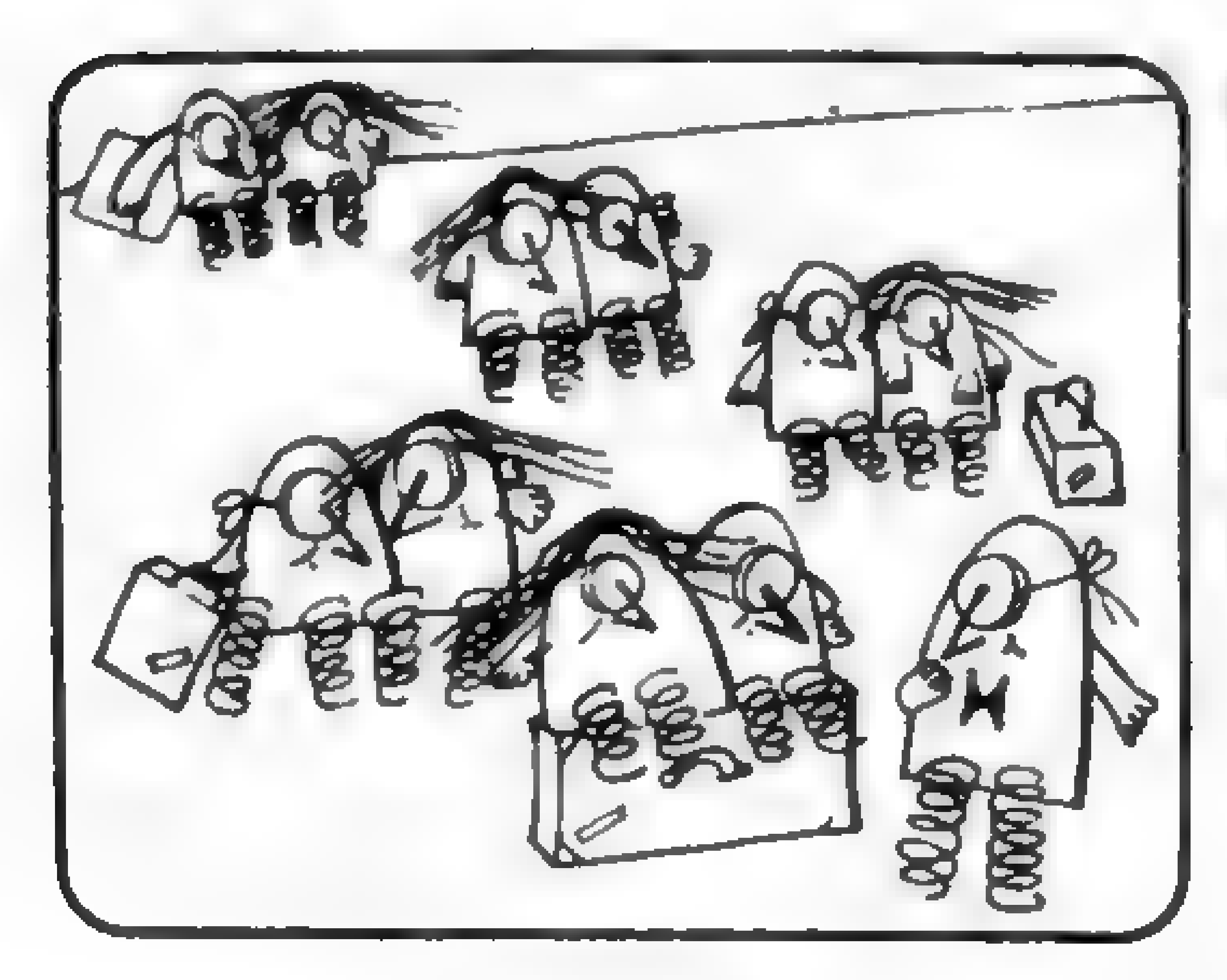


圖 4：樂他博士：「第二天，有五對正在渡蜜月的夫婦來到，無限旅館能容納他們嗎？沒問題，經理只要把每一間的房客，都移到房號多 5 號的房間，就能空出一到五號的房間給這五對夫婦。」

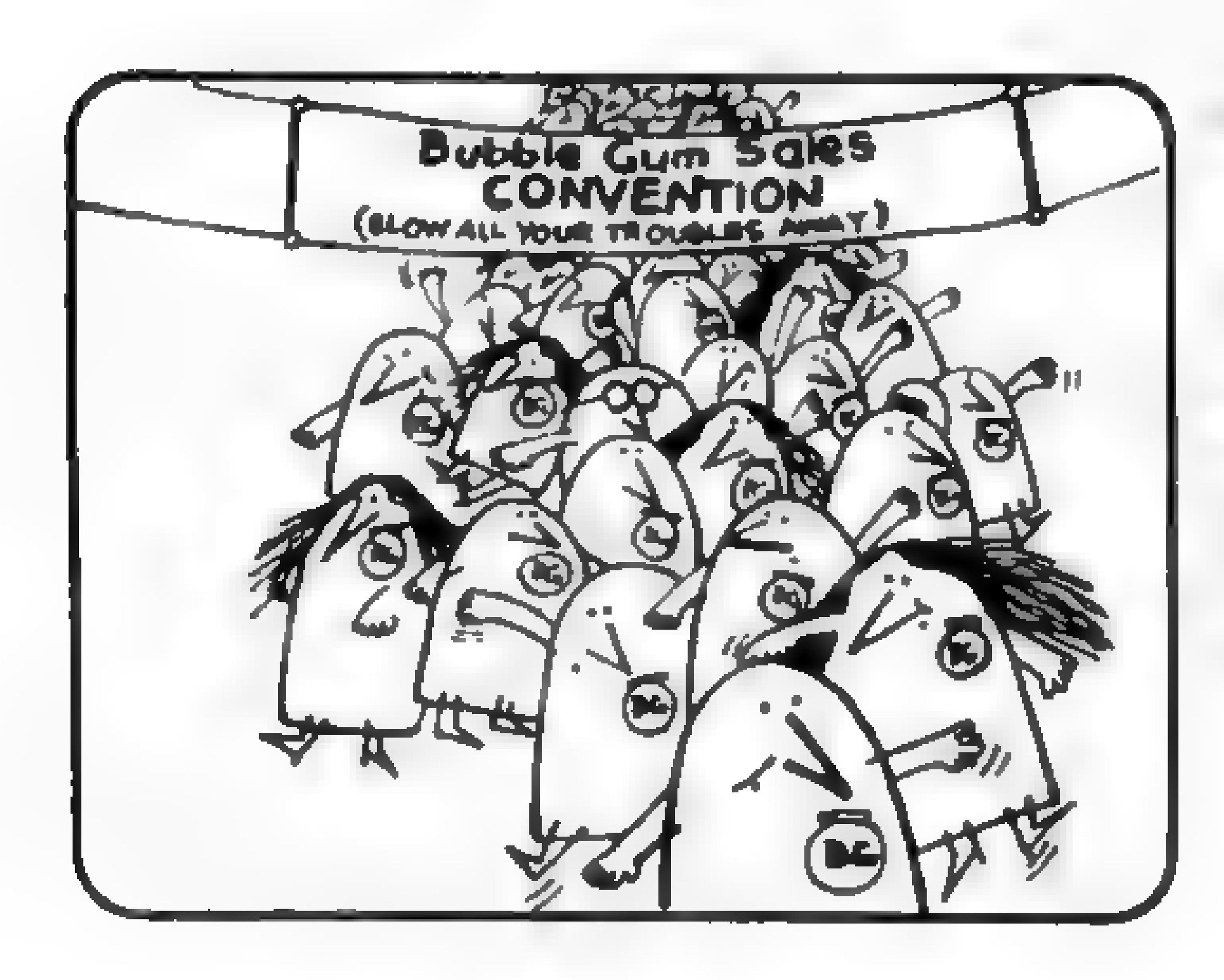


圖 5：樂他博士：「到了週末，來了數不淸的泡泡糖銷售員到此渡假。」
赫曼：「我可以明白無限旅館怎麼容納新來的『有限』人數，可是怎麼替『無限的』人數，找到房間呢？」

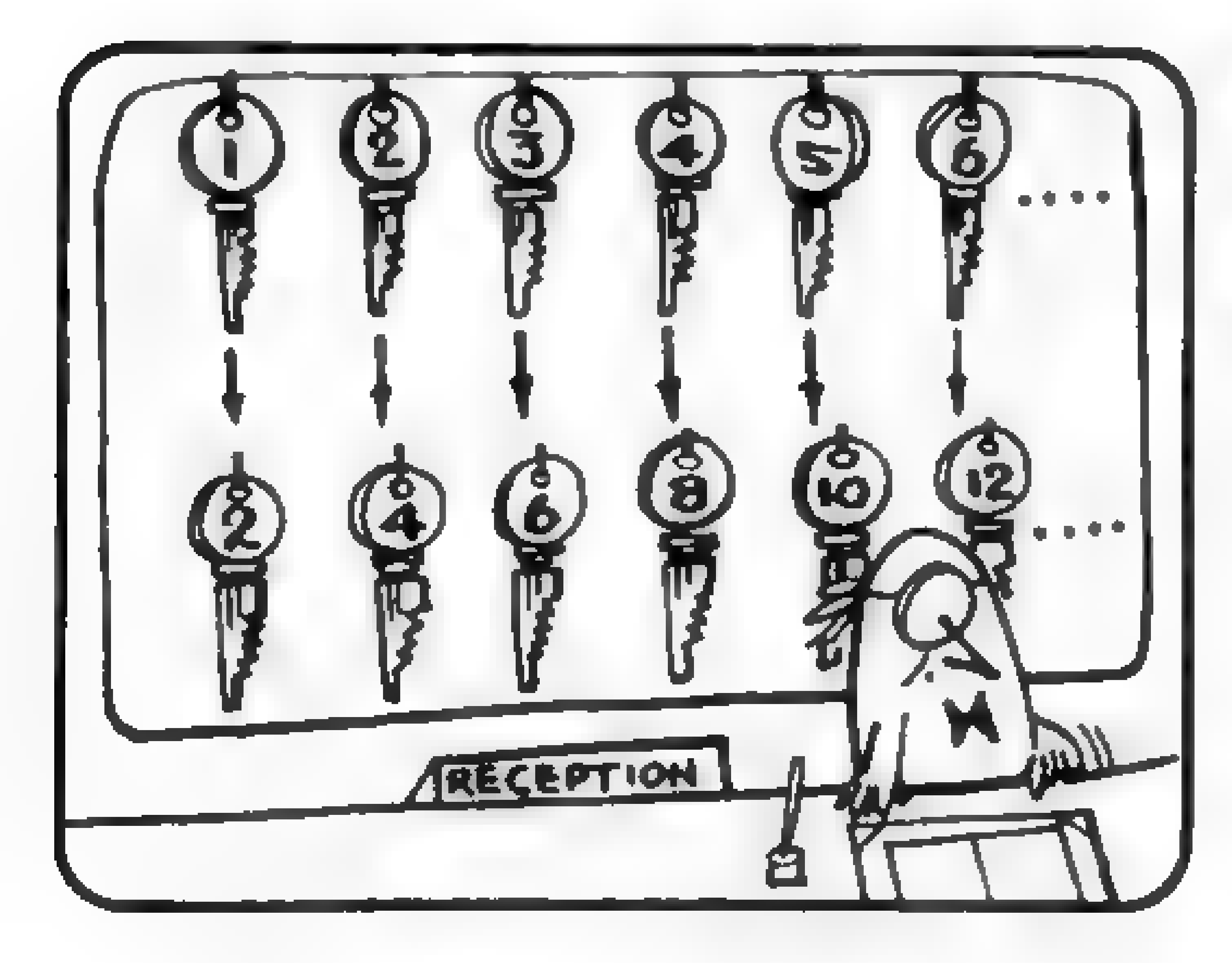


圖 6：樂他博士：「很簡單，我親愛的赫曼，經理只要把每個房間的人，移到原先房號雙倍的房間。」

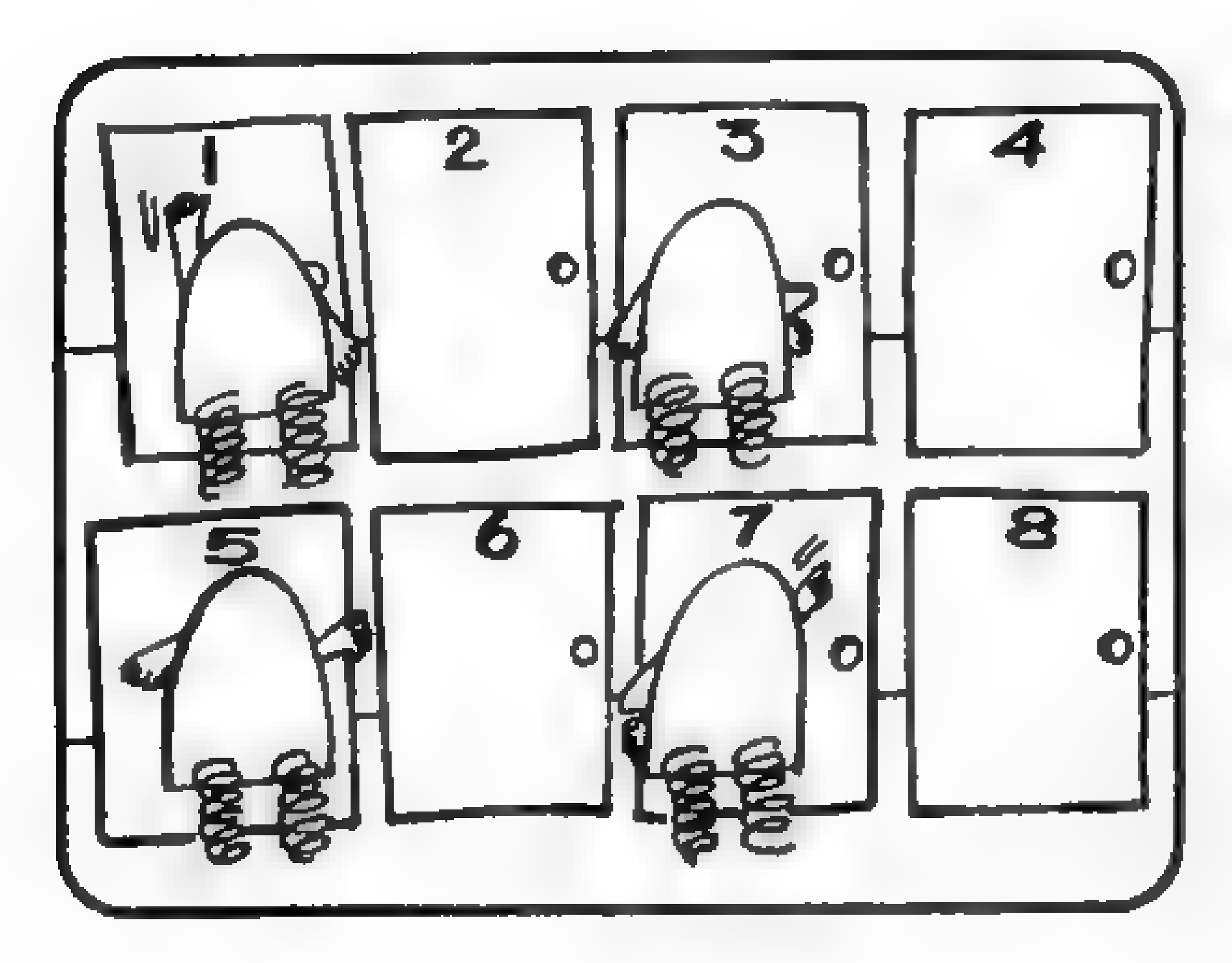


圖 7：赫曼：「原來如此，那麼每個房客都搬到雙號房，於是就可空出所有的單號房—數不淸的房間，可以給數不淸嚼泡泡糖的人。」

有限集合不能與它眞子集合(proper subset，譯按：當而且只當集合A中的每一元素都是集合B中的元素，但B中的某些元素卻不是A中的元素時，稱A爲B的眞子集合)有一對一的對應，而無限集合則不然。這看起來好像違反了成規—全部一定比部分大。事實上，一個無限集合可以定義爲：一個能與它本身的眞子集合，有一對一的對應關係的集合。

無限旅館的經理首先說明，所有數目組成的集合可以與它的眞子集合有一對一的對應關係，並且因而空出一個和五個元素。很明顯的，這個過程可以變化調整，從原集合中抽離出一個無限集合，以便留下所求的元素—有限數目的元素。

另一個說明這種「截取」(subtraction)的方式是：想像有兩根無限長的量竿，並排在桌上，它們的起點都與桌子中央齊平，並且都標上了公分刻度，往右延伸到無限遠，彼此的公分尺度都能一對一對應：0對0，1對1，2對2……一直下去，現在想像把一根量竿往右移n公分，如此一來，雖然刻度移動了，可是仍能與另一根固定的量竿有一對一的對應。如果是移動三公分，那麼對應關係就是：0對3，

1對4，2對5……。移動過的n公分，可以代表兩根量竿相差的長度，而且量竿仍維持無限長。我們可以隨自已的喜好訂n的數目，很明顯的，從無限集合中截取某些集合，是個含糊的運作過程。

旅館經理最後一次的策略，打開了無數房間的門，正說明了如何從無限集合中抽離無限集合後，仍留下無限集合。把所有數目與所有偶數一對一對應後，就會留下另一個無限集合—所有奇數的集合。



幾何

多數人認爲「幾何學」(geometry)就代表歐幾里得(Euclidean)的平面幾何。本章中我們採用克萊恩(Felix Klein)在一世紀以前對幾何更廣義的解釋—只要是對形狀屬性(properties of figures)的研究，不論是幾度空間，只要它的屬性不會隨任何變形而有所改變。

拓樸學是幾何學中非常奇異的領域，研究的就是形狀（在不斷的破壞後）的不變屬性。想想看一個橡皮作成的東西，可以任你旋轉扭曲（彎形），而不用打破原來的部分再重組。本章也常提到反射變形 (reflection transformation)，譬如「B」這樣一個不對稱的形狀，在鏡子中的影像會改變。強調反射變形，不僅因爲它導出許多迷人的矛盾外，更因爲它在現代幾何學和現代數學中佔有很重要的地位。

雖然本章中的有些矛盾，讀起來似乎不是那麼輕鬆，不過，每則都會很順利地帶你進入數學的領域中，如羣論(group theory)、邏輯、數列、無限級數、極限等。

學生學幾何時，都太侷限於圓規、量尺所畫出的東西，以及按部就班地證明各種定理，反而忽略幾何學和其它數學領域間令人興奮的關聯，以及把幾何應用在天

文、物理和其他科學上那種難以言喻的美。

繞女孩團團轉

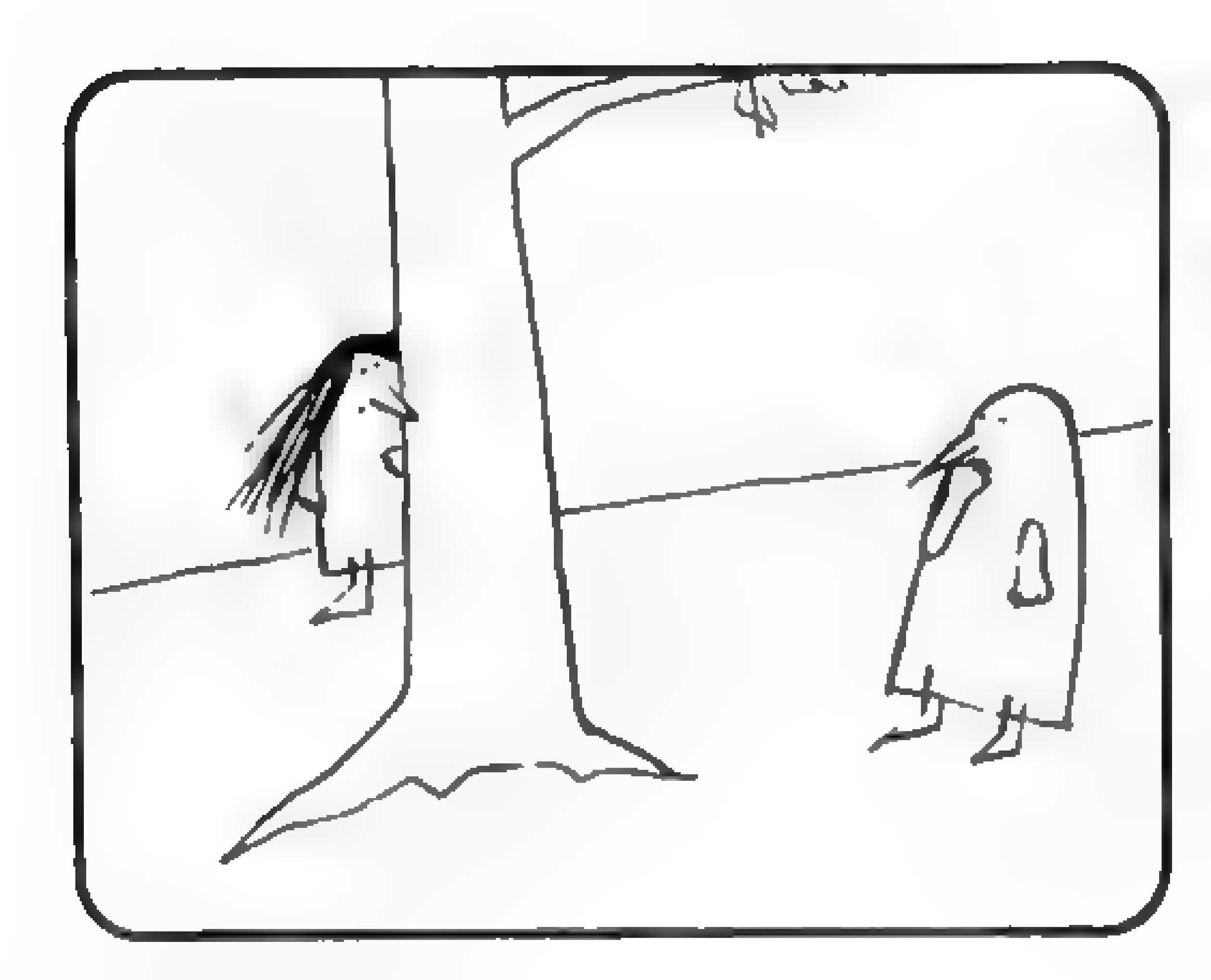


圖1：馬文：「哎！曼陀，樹後面是妳嗎？」

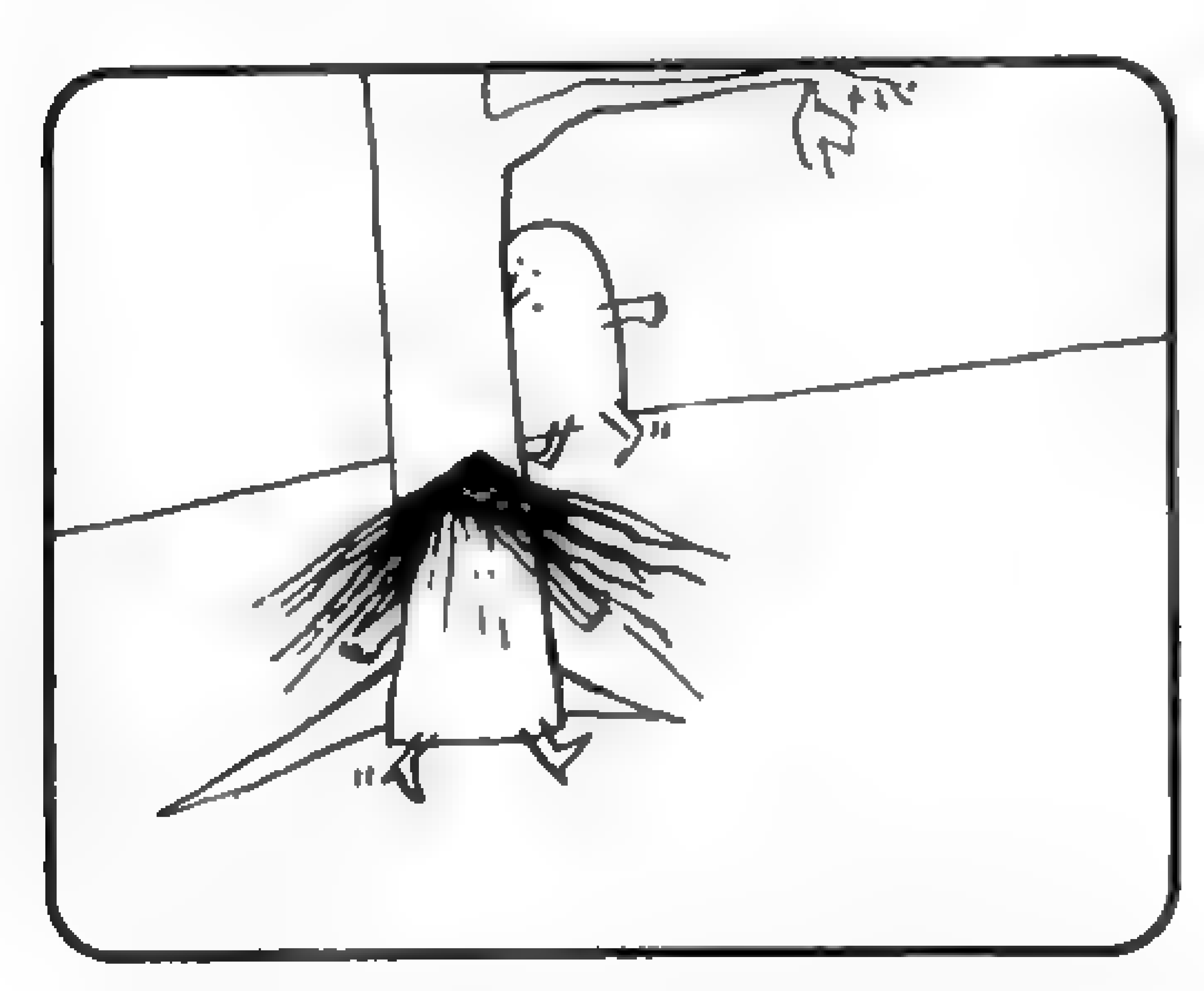


圖2：馬文繞著樹轉時，曼陀也跟著轉，她鼻子對著樹，羞怯地繞著樹轉，不讓馬文看見。

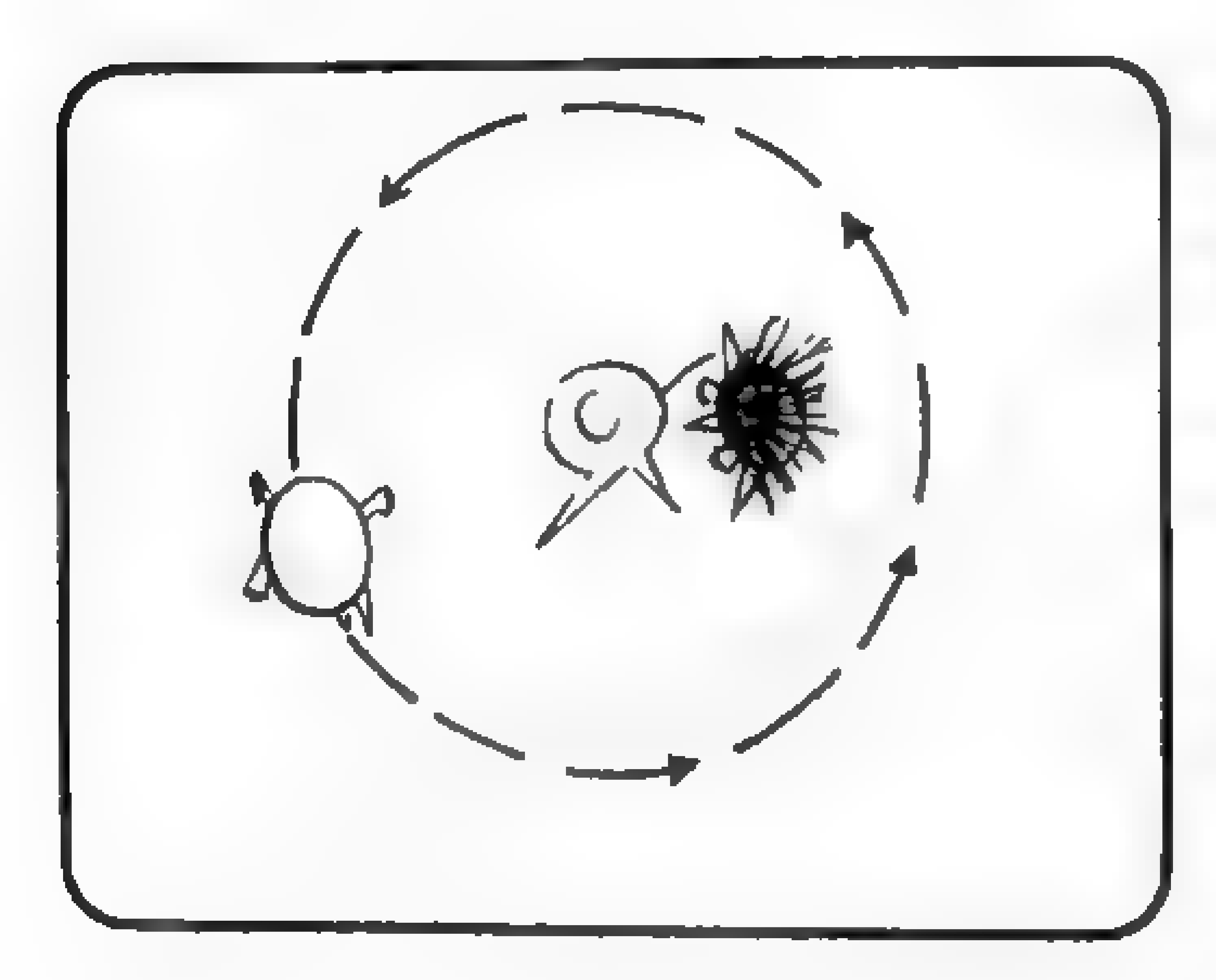


圖3：他們繞著樹轉一圈後，又回到起點。馬文真的是繞著曼陀轉圈嗎？
馬文：「當然！我既然繞著樹轉，也就是繞著曼陀轉囉。」
曼陀：「胡說！即使沒有那棵樹，他壓根也沒見到我的背。你怎麼可能繞個東西轉一圈後，卻沒看到它的每一個面呢？」

以前是用獵人和松鼠的故事，來說明這個古老的矛盾：有隻松鼠坐在一株殘幹上，獵人繞著樹幹轉時，松鼠也跟著轉，總是保持面向獵人。在獵人繞完樹幹一圈後，他是否也繞了松鼠一圈？

這個問題無法回答，除非先定義何謂「繞一圈」。日常生活中，許多常用的字都沒有明確的定義。詹姆斯(William James)在他不朽的哲學作品—「實用主義」(Pragmatism)中，對獵人和松鼠的矛盾有段有趣的討論。他認爲其中之所以有意見相左的情形，純粹是語意上的不同所引起的。一旦持不同意見的雙方，瞭解到所爭的只是如何定義一個詞，溝通障礙馬上煙消雲散。只要大家查覺到精確定義名詞的重要性，很多比這個例子更激盪的爭論，就會變成很無聊的爭執。

月亮的奧秘

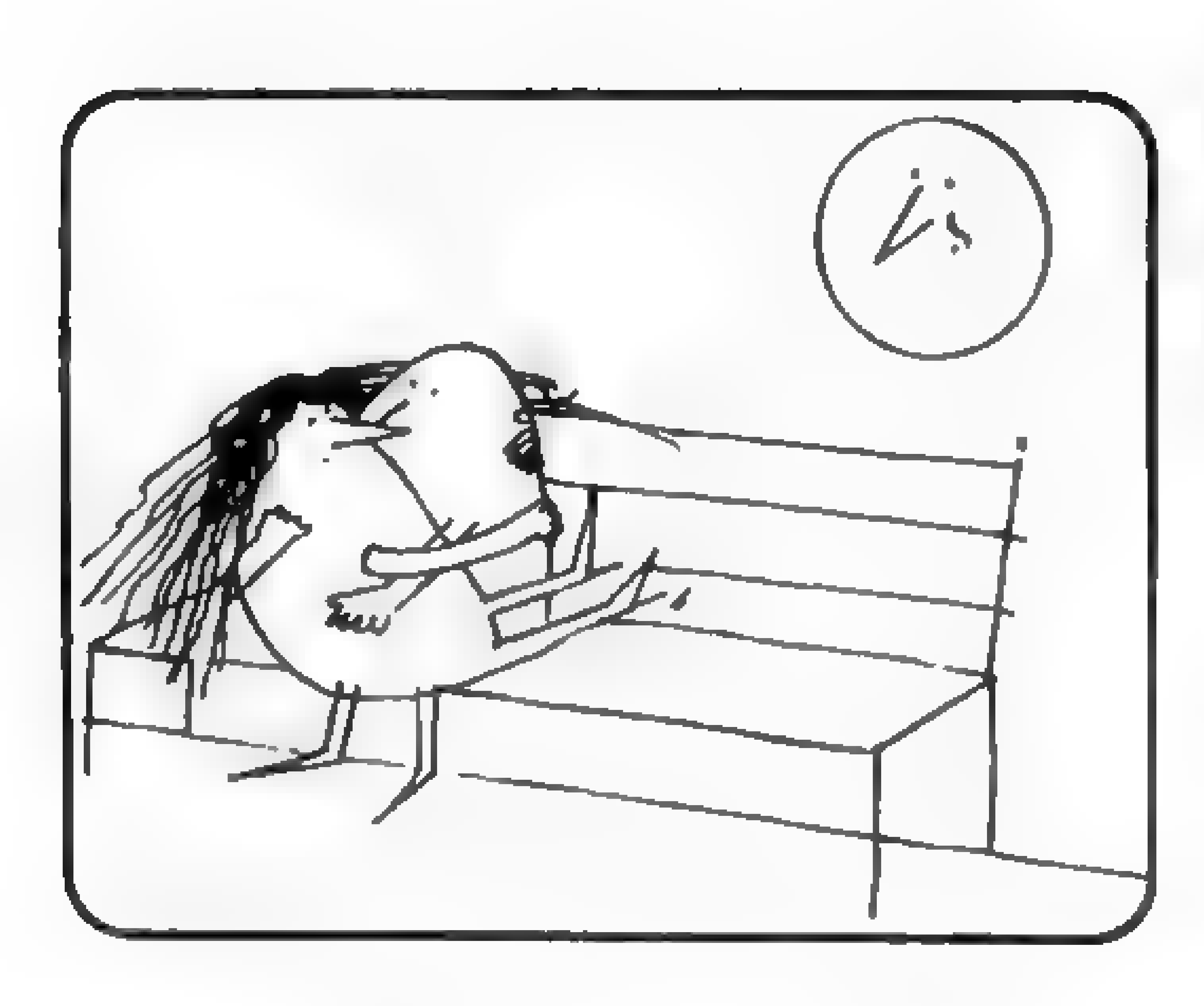


圖 1：月亮在繞著地球公轉時，面對地球的總是同一面。月球繞著地球公轉一週後，是否也繞著本身的軸轉了一圈呢？

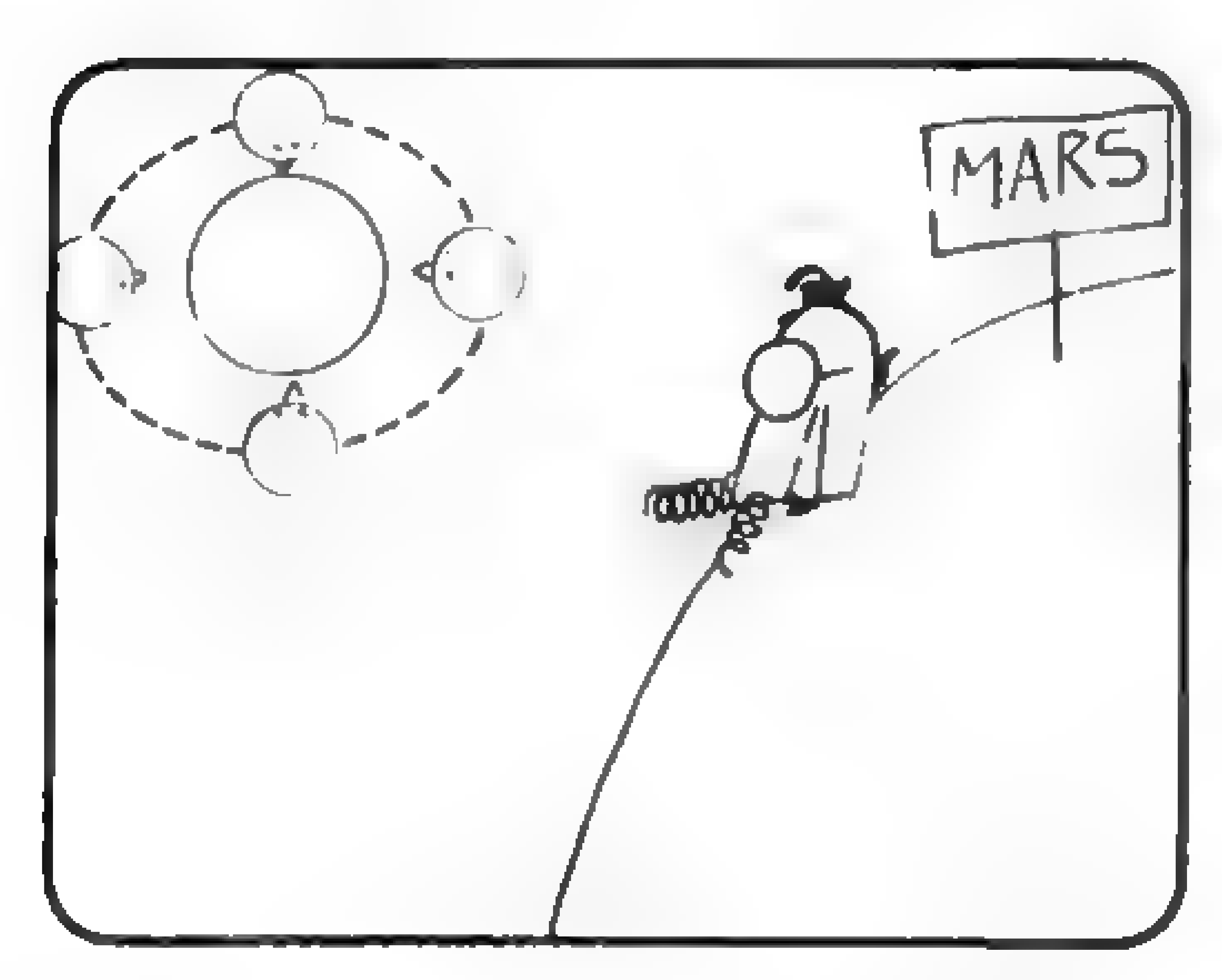


圖 2：父親：「以一位太空人的身份來看，我認為是的。如果你從火星看，你會看到月球每次繞地球轉時，同時也繞著自己的軸轉了一圈。」

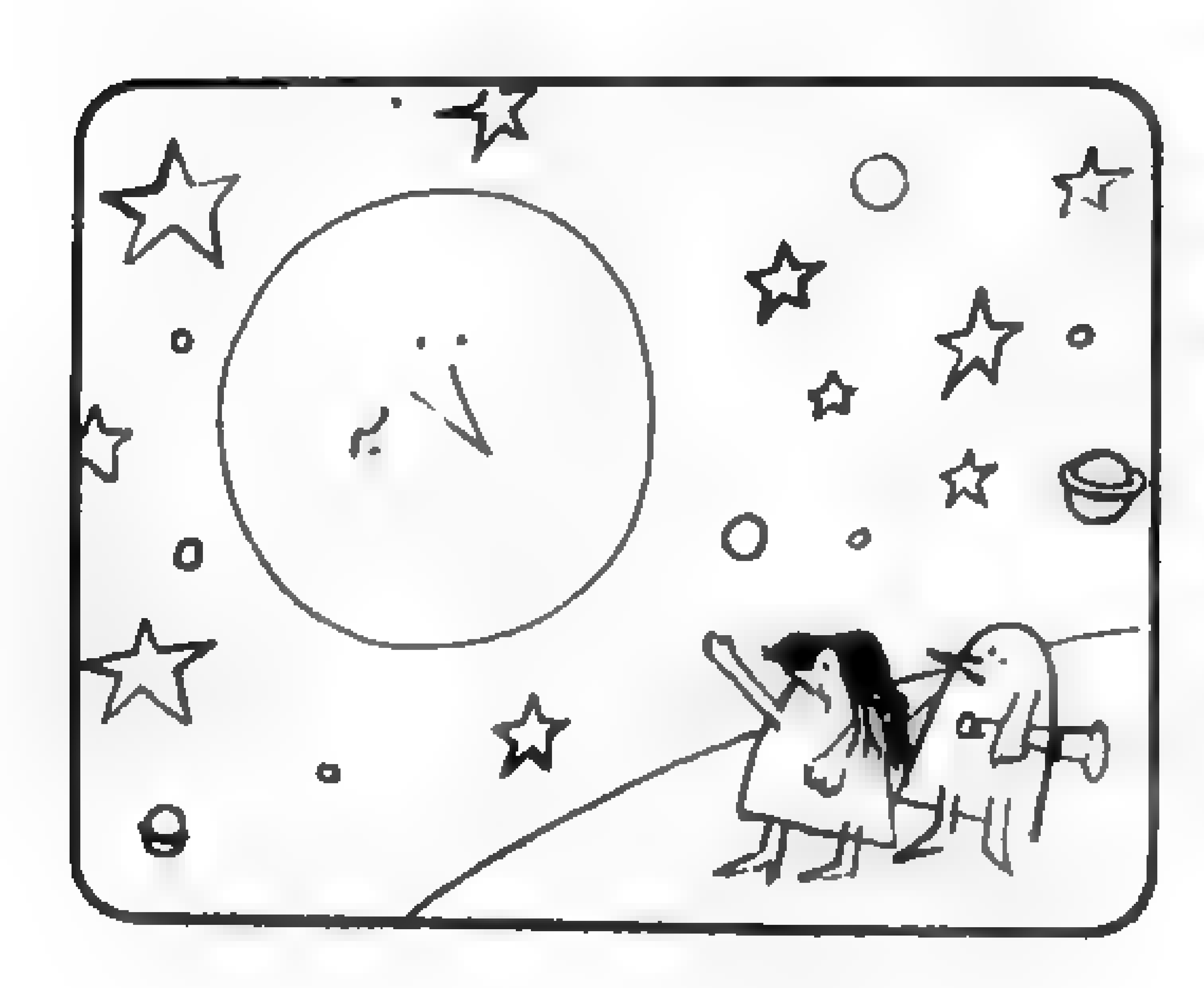


圖 3：女兒：「老爸，月球怎麼可能旋轉？如果真的在轉，我們應該會看到月球的各個面，可是我們却老看到同一面。」

月球有轉動嗎？前述那個男孩有繞著女孩轉嗎？這些真的是矛盾，或只是文字定義上的爭論？

和前面的矛盾一樣，這個矛盾是另一個語意上的爭論。到底何謂「繞著本身的軸轉圈」？在地球上的觀察者來看，月亮好像根本沒轉；可是在「地球—月球」系統之外的觀察者看來，月亮的確在轉。

在此我們先來討論一個很棒的小矛盾，和月球的問題關係密切。畫兩個大小一樣，彼此相切的圓圈，代表甲乙兩圓盤，甲圓盤不動，乙圓盤繞著它轉，兩圓保持相切。請問乙圓盤繞著甲圓盤轉一圈後，要自轉幾次？

多數人會回答一次。現在用兩個大小一樣的銅板來試驗，我們會訝異的發現，實際上轉動的銅板會自轉兩次。

是不是眞的轉兩次？這就和「月球—地球」的矛盾一樣，轉幾次要看從那個參考體來觀察。如果從兩個銅板開始轉時，接觸的那一點算起，轉動的那個銅板只轉一圈；可是如果你居高臨下來看，轉了兩次。這種爭論實在很讓人生氣。「科學美國人」雜誌在一八六七年首次提出這個問題時，持反對意見的讀者信件如雪片飛來。

讀者很快就能領悟「月球—地球」矛盾和銅板矛盾間的關係。認爲轉動的銅板

只轉一次的人，同時也認爲月球根本沒有自轉。有位讀者寫道：「如果你抓一隻貓繞著你的頭甩，牠的頭、眼睛和脊椎會繞著牠本身的軸轉嗎？等牠轉到第九圈時，不早就沒命了？」

天體運行所產生的「慣性效果」(inertial effect)可由「傅科擺」(Foucault pendulum，譯註：指一種可測試地球自轉的裝置，由法國物理學家傅科所設計）測試出：把「傅科擺」放在月球上，就可看出月球繞著地球公轉時，也同時在自轉。那麼這會改變先前所說，轉動是隨觀察者的參考體而異嗎？

怪的是，根據廣義相對論，並不會。你可以假設月球完全不轉動，而是整個宇宙（先不管其時空架構與其質量是否有任何關係）繞著月球轉。轉動的宇宙會產生重力場，它的效果和月球在固定的宇宙內運行所產生的慣性場是相同的。當然，把宇宙當作一個固定架構是比較容易想像的。可是坦白說，在相對論中，是否「眞的」轉動或不動，是個沒有意義的問題，因爲只有相對運動才是「眞的」。

方塊和妙女郎

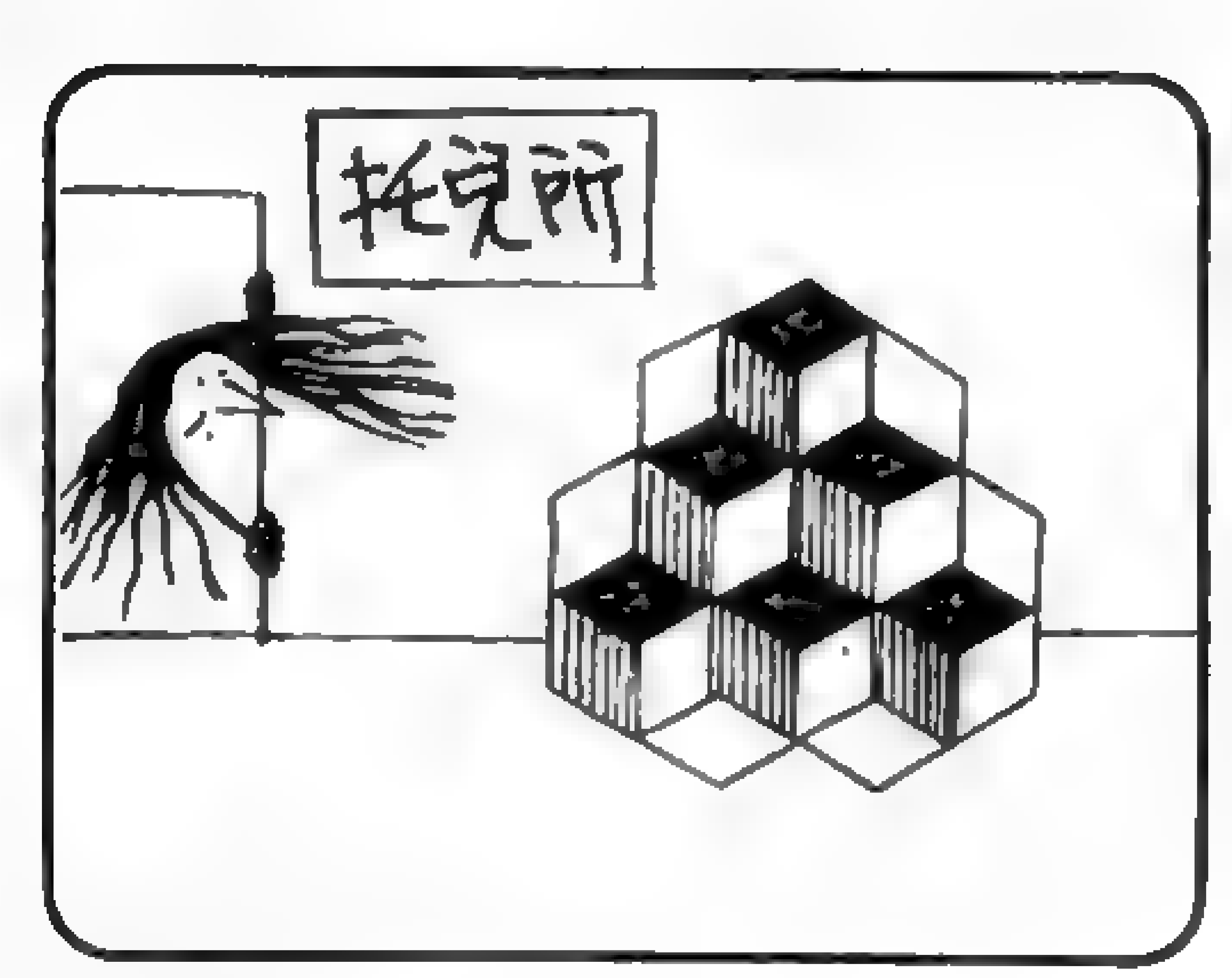


圖 1：數一數圖中有多少方塊？六個或七個？



圖 2：這幅畫畫的是妙女郎嗎？還是你只是看到一位老巫婆？

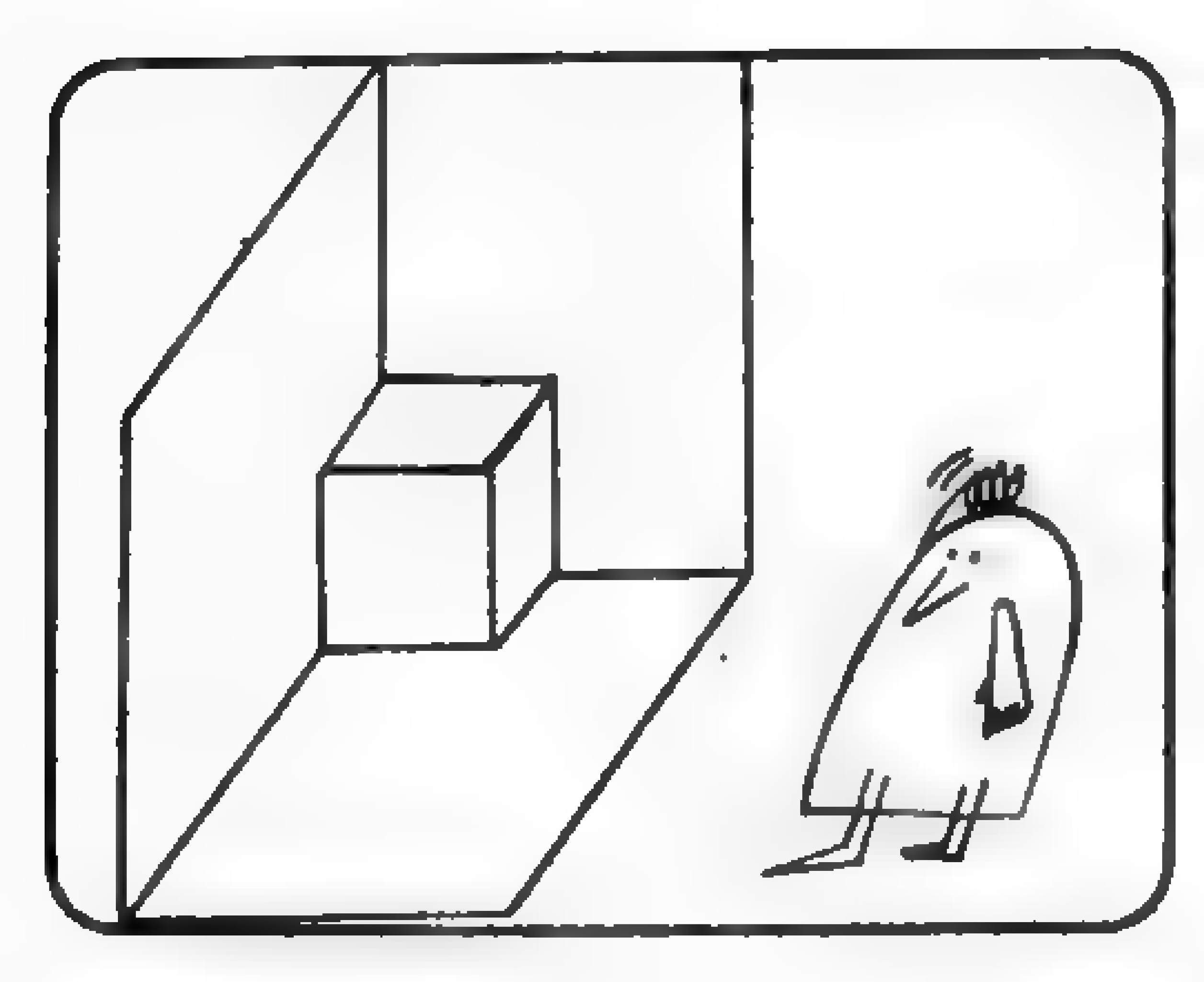


圖 3：你從圖中看到什麼？房間角落有個小方塊？大木塊外黏著一個小方塊？或是一個大木塊在角角上有個立方缺口？

每個人對所看到的圖象，各有不同的解釋，才造成這些視覺上的幻影。在第一個圖中，你所看到的平面圖，可視爲一堆立方體的透視畫法，不過可用兩種不同的方式來看，各種看法都好，所以你的腦子也隨之翻過來轉過去。

這幅「女郎或巫婆」的畫也是同樣情形，你不可能漏看任何一個圖象，所以你的腦子也是來回於兩種解釋中。

在第三個圖中，有三種解釋。對多數人而言，看到大木塊在角角上有個立方體缺口，是最困難的，因爲這類圖象比較少見。可是如果你用力看，並且把那個小的方塊想像成一個缺口，而不是實心的，那麼你終究會看到這個圖象。學到以三種方式來「看」這個圖形，會讓你更具有解釋幾何圖形的能力。在幾何學上，看錯圖形，會搞得你滿頭霧水。

任弟的魔毯

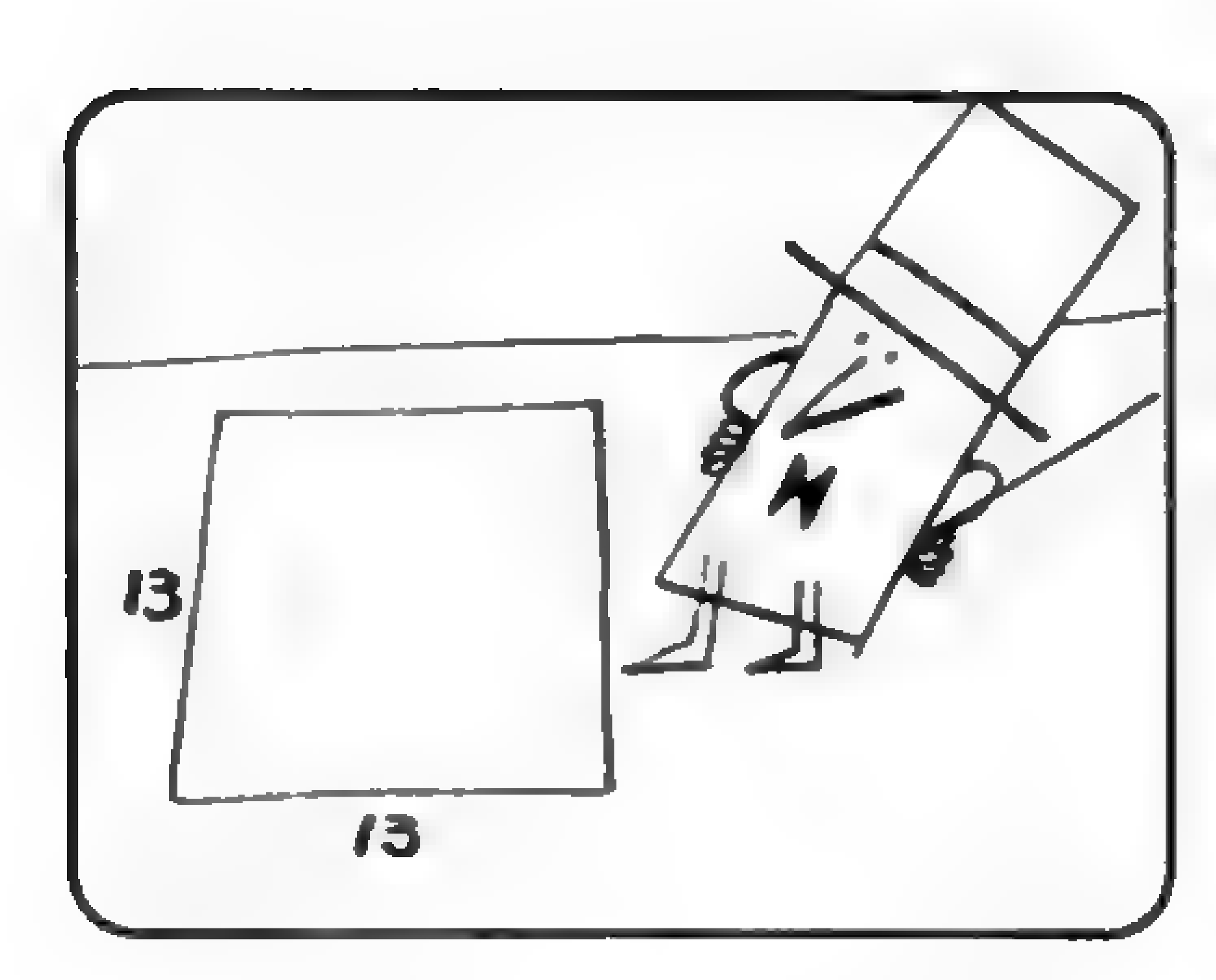


圖 1：任弟先生是世界著名的魔術師，他有張 13×13（平方公寸）的地毯。現在他想把地毯變成 8×21 的尺寸。他把地毯帶到地毯商歐馬先生處。

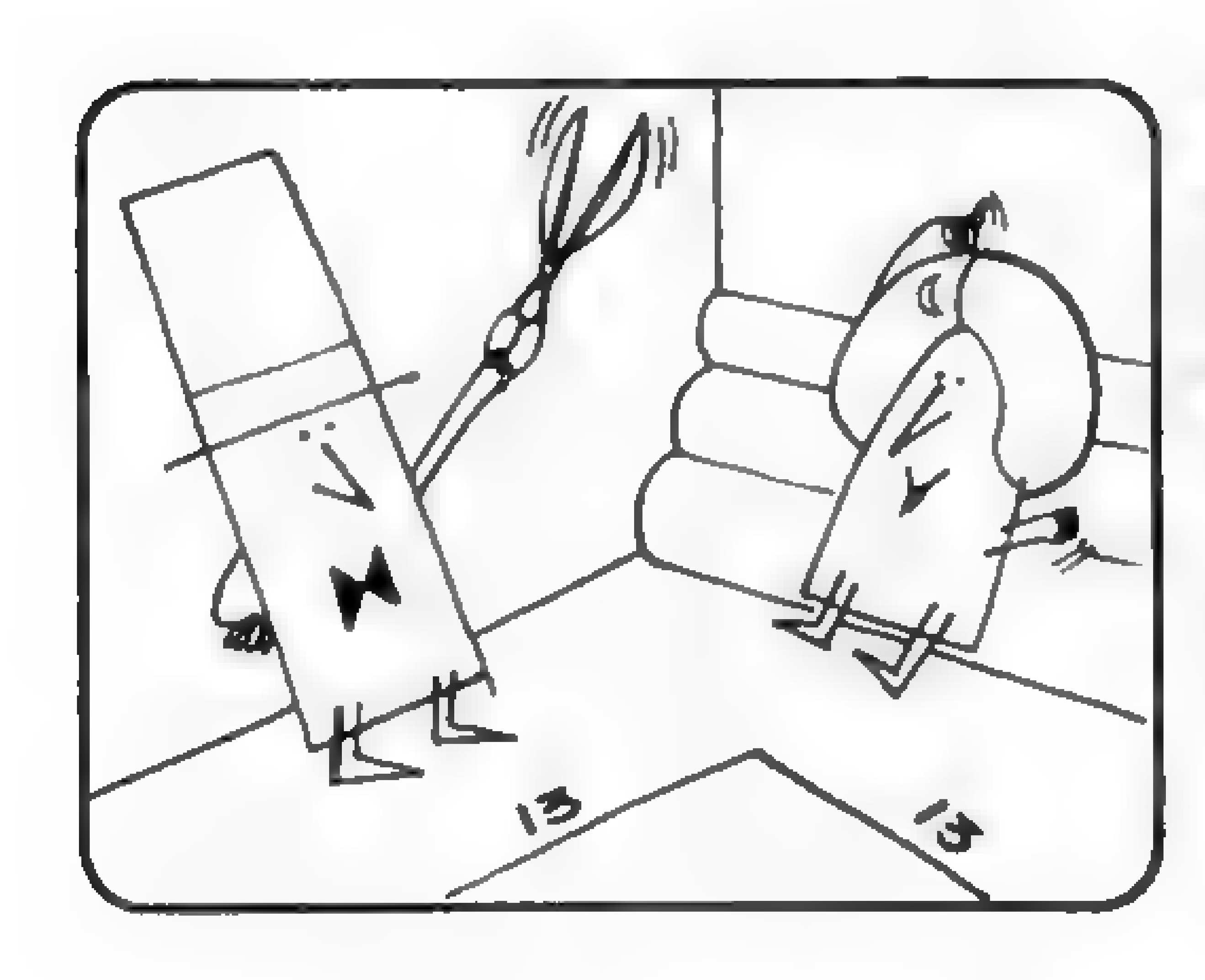


圖 2：任弟：「歐馬，我的朋友，我要你把這片地毯裁成四份，然後把它縫成 8×21 大的地毯。」歐馬：「很抱歉，任弟。沒錯，您是偉大的魔術師，可是您的算術未免也太差了，13×13 是一百六十九，而 8×21 是一百六十八，怎麼湊也湊不上嘛！」

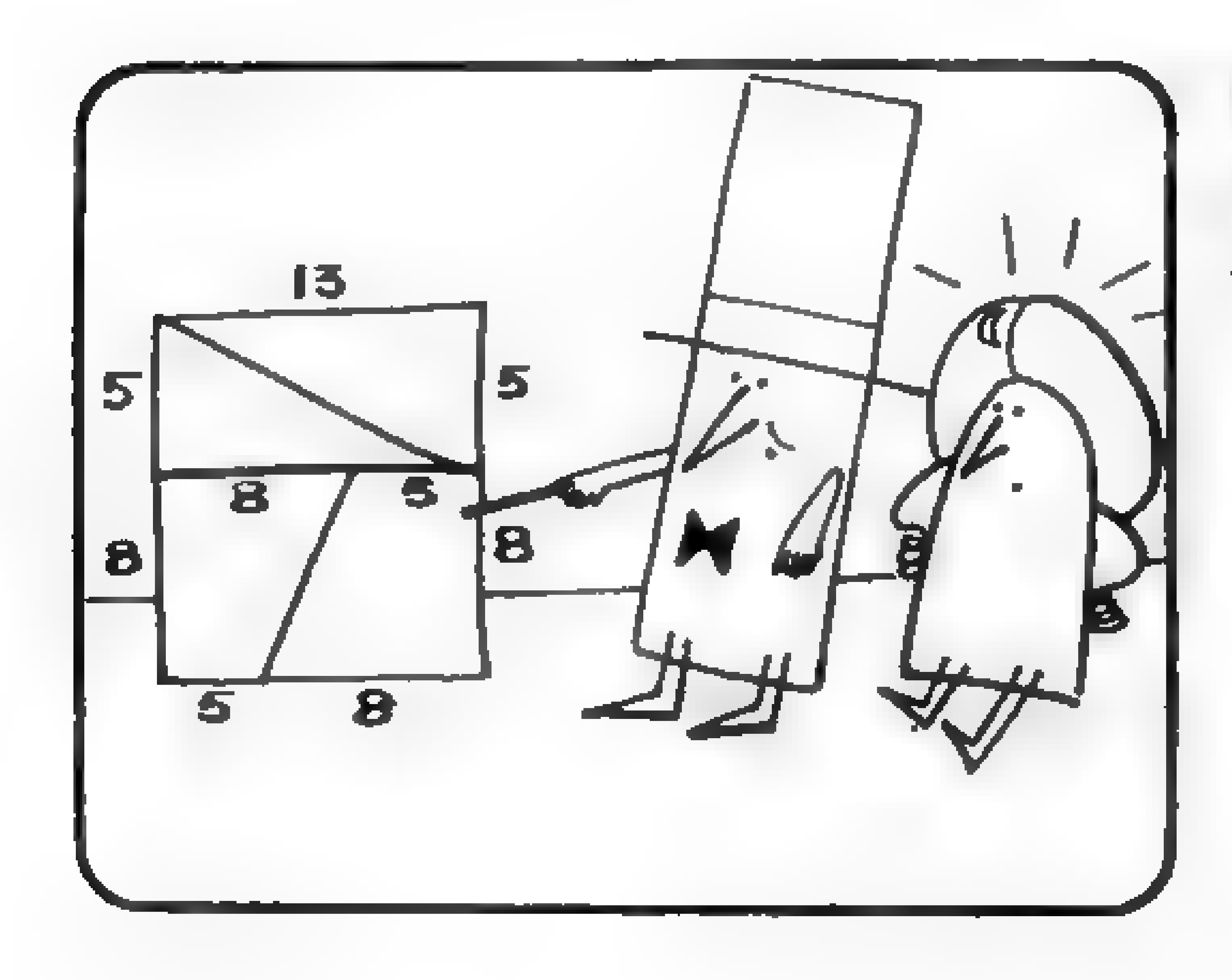


圖 3：任弟：「親愛的歐馬，偉大的任弟是從來不會錯的，你只要把地毯切成像這樣的四片。」

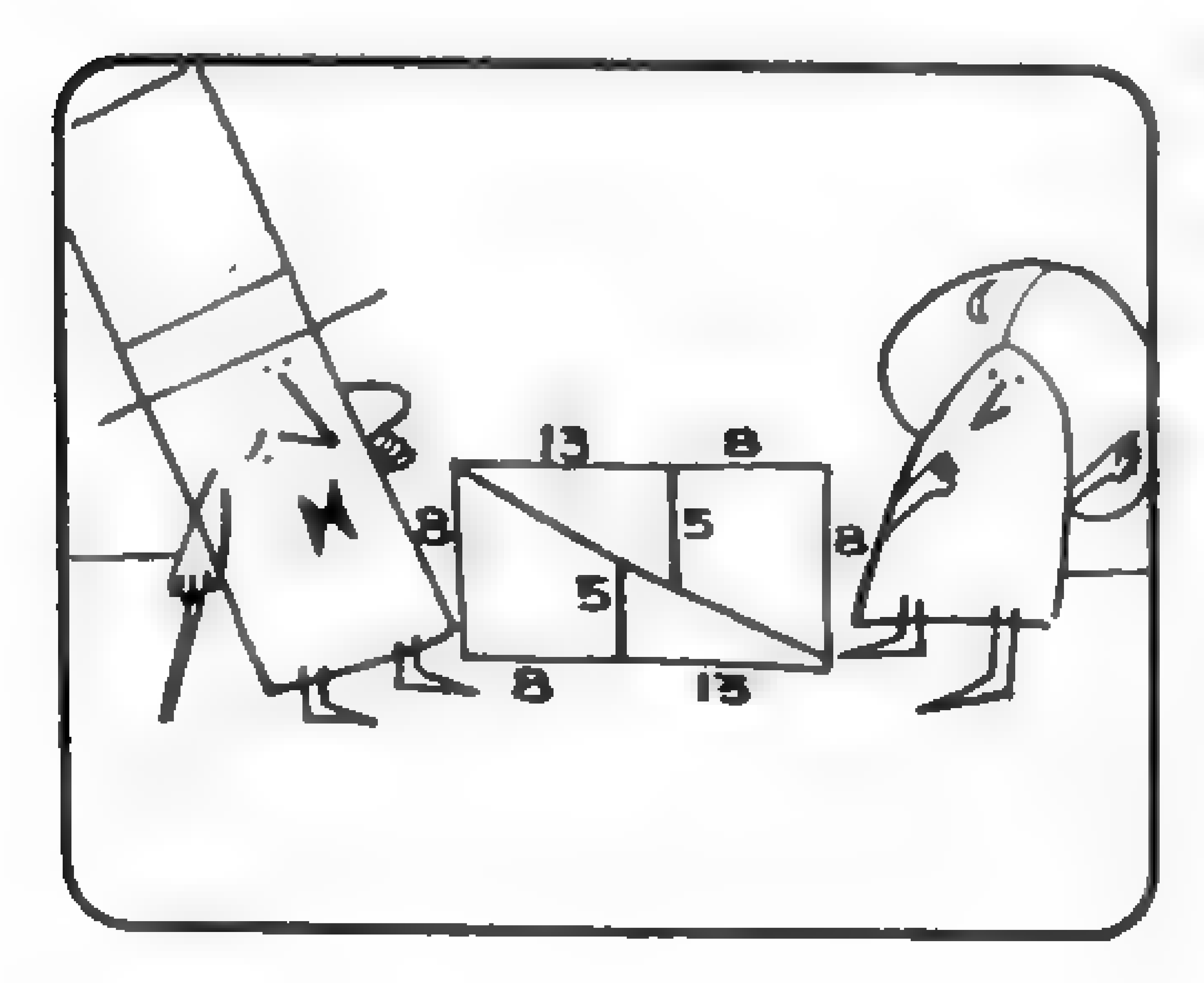


圖 4：歐馬照著他的話作，然後任先生把四片重新排過，歐馬把它們縫好後，就成了一塊 8×21 的地毯。歐馬：「我簡直不敢相信，地毯的面積居然從一百六十九縮成一百六十八。不見的一平方公寸到那兒去了？」

這個古典的矛盾很奇妙，並且難以解釋，値得花時間實際在張方格紙上畫個方塊，剪成四片，再重組成一個矩形。除非你的方塊面積很大，並且把它畫的很仔細，切的很精確，否則你不會注意到在矩形的對角線上，稍稍有點重疊。不見了的面積，就在那重疊的部份上。如果你不信，有一個證明的方法—就是算出矩形對角線的斜率，再和那四小片的各斜率相比即可知。

如果在方格紙上畫個矩形，把它分割成數片，再拼成正方形，情形又會如何？你可能想知道結果。

這個矛盾牽涉到四個長度：5、8、13和21。你可能認出這四個數字，依著一個有名的順序。你能找出這四片數字的「遞歸律」(recursive rule)嗎？這個順序稱爲「菲博納奇數列」(Fibonacci sequence)，即每個數字都是前兩數字之和，如：

1、1、2、3、5、8、13、21、34……

只要在菲博納奇數列中，取出四個連續數字（不過剛開始兩個數字不能相同），就可以組合成各式各樣的這類矛盾。每一種情形你都會發現矩形和正方形面積不

同，有的時候矩形比較大，有時候比較小。接下來我們發現矩形會比較小是因爲沿著矩形的對角綫，有塊菱形的重疊：矩形比較大時，多空出來的面積也是菱形。

同中有異

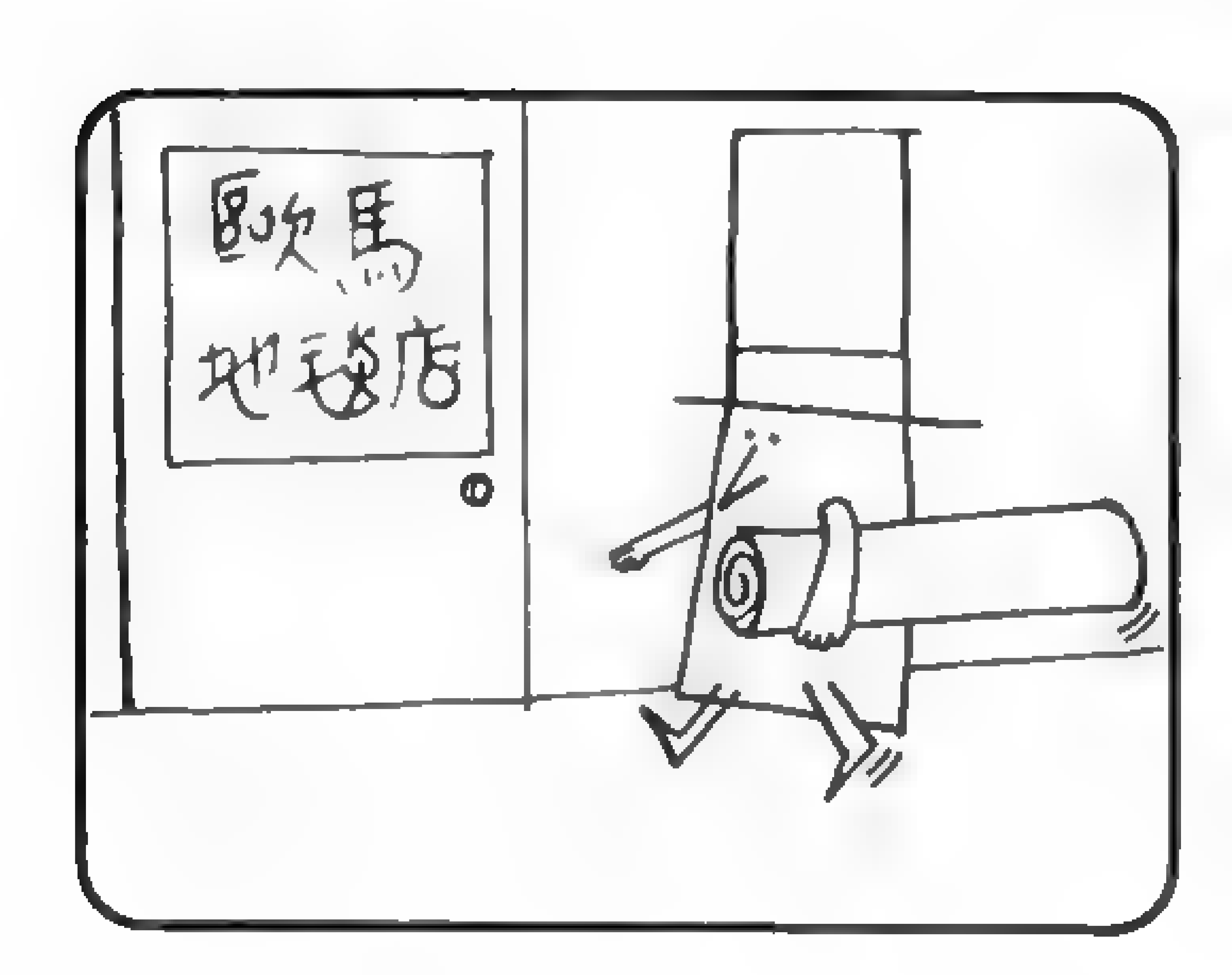


圖 1：過了幾個月以後，任先生又帶一塊 12×12（平方英寸）的地毯回來。

任弟：「歐馬老友，我的電熱器太熱了，燒壞了這塊美麗的地毯。我只要把它重新切割縫合後，很容易就能去掉這個洞。」

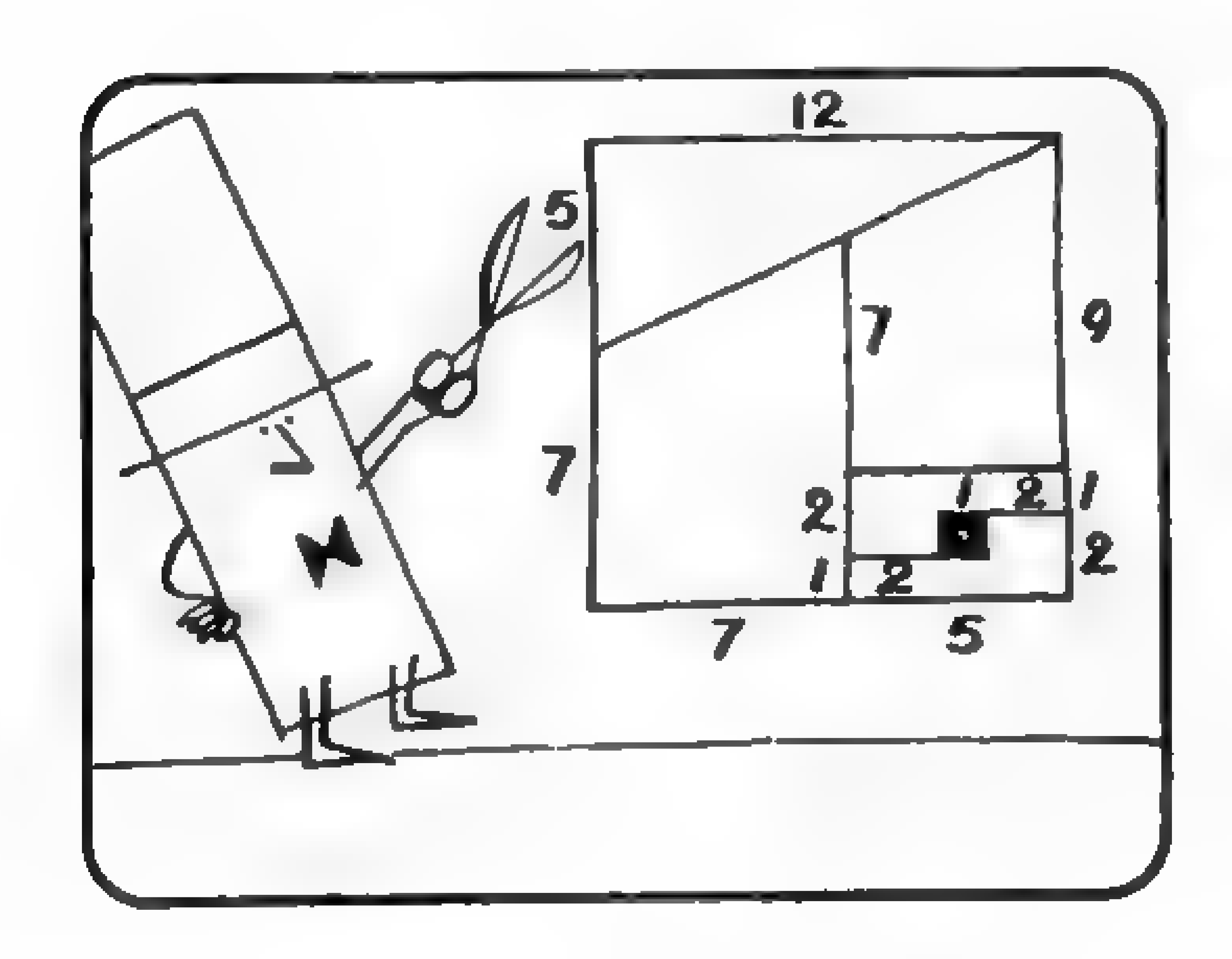


圖 2：歐馬不太相信，不過他仍然照著任弟的話作。等這些片斷重新縫合後，這塊地毯仍是 12×12，可是洞卻消失了。

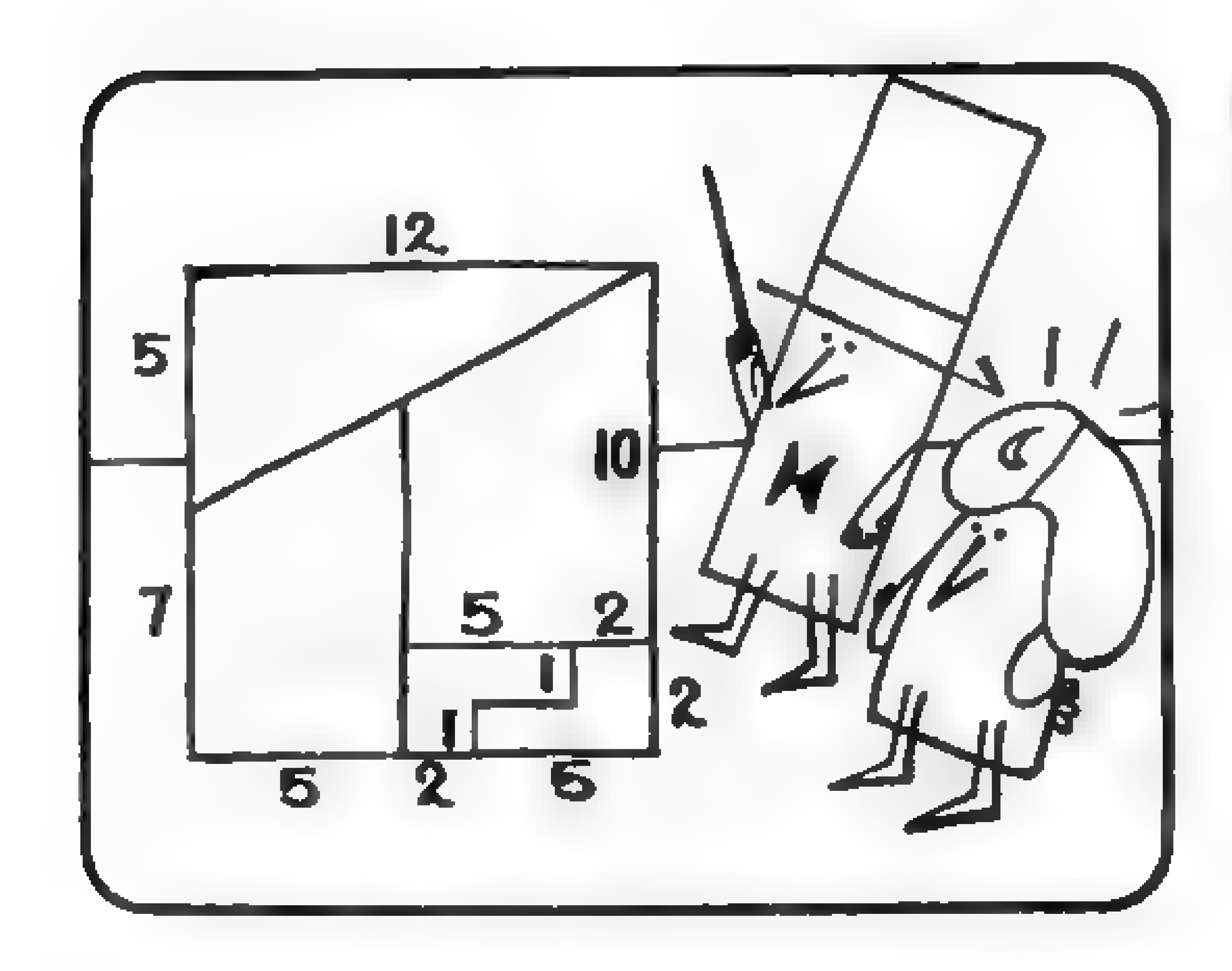


圖 3：歐馬：「任弟，你一定要告訴我你怎麼變的，補洞的那塊到底從何而來？」

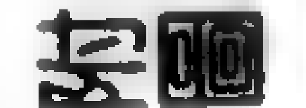
怎麼可能兩塊相同面積的地毯，卻有不同的大小？在這個矛盾中，不見的面積是個眞正的洞。和前一個矛盾不同的是：這兩塊地毯在斜線的接縫處都非常吻合(無重覆、無缺口)，那塊失蹤不見的一平方公寸地毯，到底是怎麼回事？

要找到答案，先裁好兩塊沒有洞的正方形，愈大愈好，把其中一塊仔細切割，然後重新排過各小塊，讓它有個洞；再把這第二塊放在第一塊上頭，如果把兩塊上端和兩邊都對齊，你會發現第二塊並非正方形，而是個矩形——一邊多出十二分之一公寸。沿著底線多出的十二乘以十二分之一的大小，正和那個洞面積一樣。

這就解釋了那不見的小方塊到那兒去了，可是爲什麼方塊會長高呢？這是因爲那片直角三角形斜邊的頂角並未與正方形的頂角對齊。明白這點，你就能造出各種方塊，多出或少掉大於一平方單位的區域。

這類矛盾通常叫做「加里正方形」(Curry square)，取名自它的發明者加里(Paul Curry)，一位紐約的業餘魔術師。這種矛盾可以千變萬化，包括三角形也可以。

請沿線剪下



THE VANISHING LEPRECHAUN

THIRD HINT

PREMIER INDICE

DEUXIÈME INDICE

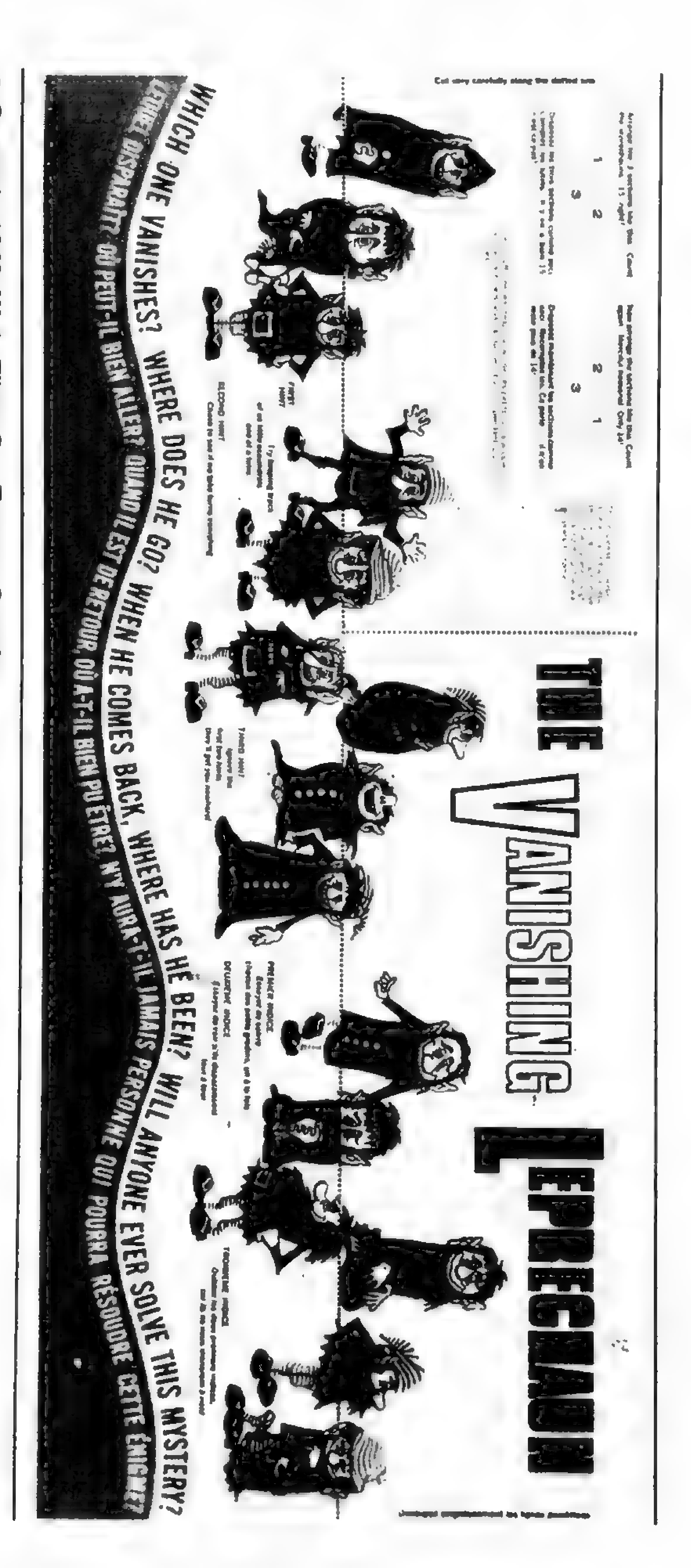
TROISIÈME INDICE

WHICH ONE VANISHES? WHERE DOES HE GO? WHEN HE COMES BACK, WHERE HAS HE BEEN? WILL ANYONE EVER SOLVE THIS MYSTERY?

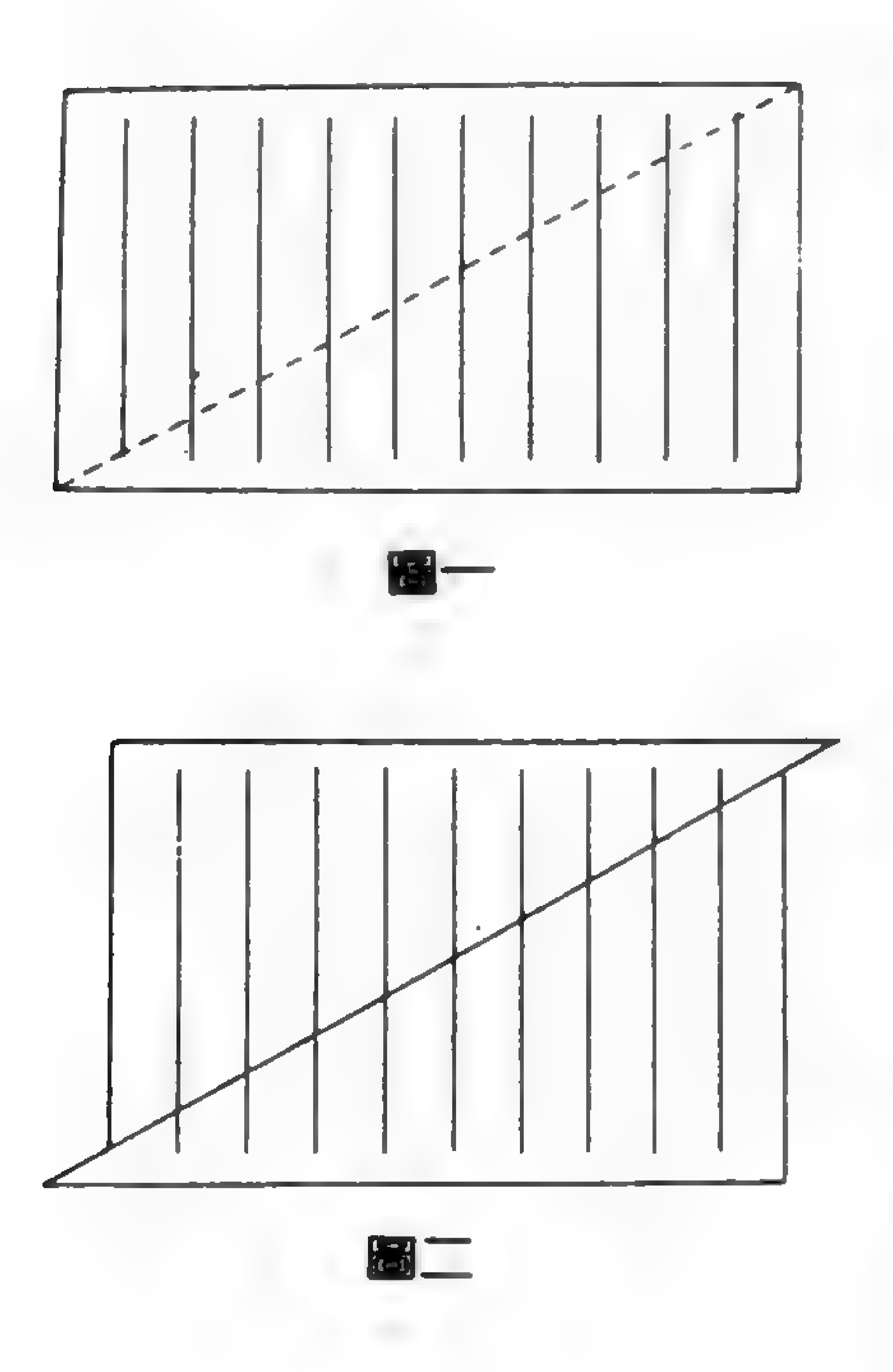
DE RETOUR, OÙ A-T-IL BIEN PU ÊTRE?

PERSONNE QUI POURRA RÉSOUDRE CETTE

消失的精靈


THE VANISHING LEPRECHAUN
WHICH ONE VANISHES? WHERE DOES HE GO? WHEN HE COMES BACK, WHERE HAS HE BEEN? WILL ANYONE EVER SOLVE THIS MYSTERY?
LEQUEL DISPARAÎT? OÙ PEUT-IL BIEN ALLER? QUAND IL EST DE RETOUR, OÙ A-T-IL BIEN PU ÊTRE? N'Y AURA-T-IL JAMAIS PERSONNE QUI POURRA RÉSOUDRE CETTE ÉNIGME?

這類幾合矛盾中最好玩的一種，是在圖畫中讓一個人消失。「精靈怎麼不見了」(The Vanishing Leprechaun Puzzle)由加拿大的派德生(Pat Patterson)所繪，就是一個很有名的例子。如圖就是那幅畫，請先把附圖沿線撕下來，然後沿著虛線切割成三個矩形。把上端的兩個矩形調換，十五個精靈中的一個，就會不著痕跡的消失。是誰消失了，他到那兒去了?當他回來時，他會在那裏?



圖一

圖二

要解釋這個矛盾，先在張卡片上畫十條線，如圖一。沿著虛線剪開，把下半邊往左移，如圖二。

現在數數有幾條線，只剩九條，要問是那一條線消失是沒有意義的。原來的十條線，被分成了十八個部分，經過重新安排後，變成九條線，當然每條線會比原來的十條線各長了九分之一。如果把圖恢復推正，第十條線又會重現，這時每條線又比剛剛的九條線短了十分之一。

消失的精靈就是用同樣的手法，當圖中有十五位精靈時，每位都比有十四位精靈時矮了十五分之一。變成十四位精靈時，我們無法找出是那位精靈消失了，因爲這十四位是「完全不同」的精靈，都比原來的高了十四分之一。

這類矛盾背後的原則，正是老式騙人手法的基礎。把九張鈔票剪成十八分（根據上面線條的原則），經過重新安排後，可以變成十張鈔票。不過因爲鈔票上的號碼不合，很容易找出破綻。美鈔上有兩個號碼，一上一下，正能防範這類作假的手法。一九六八年，在倫敦有個人用此手法造假五英磅紙幣，而被判刑八年。

扭曲的手鐲

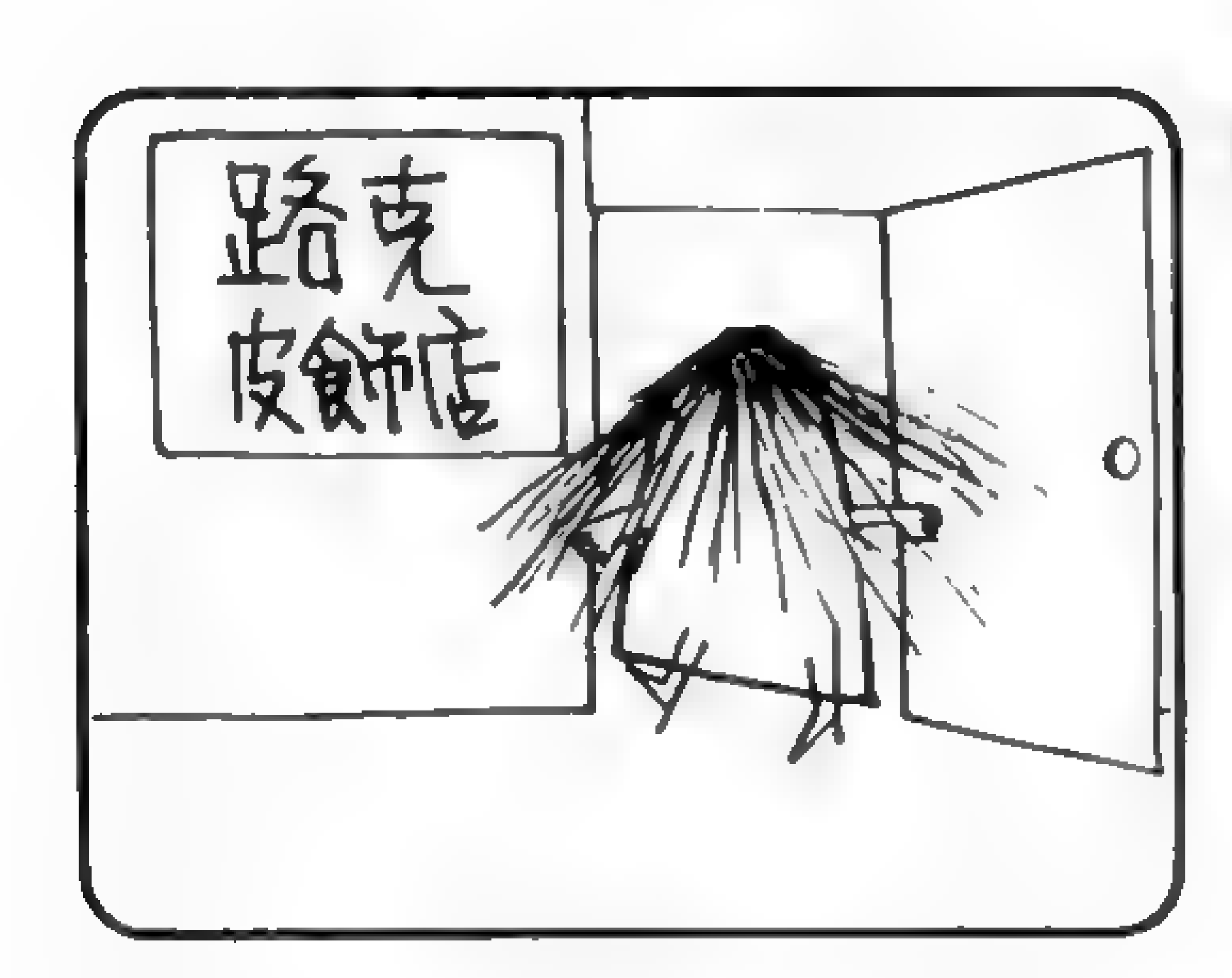


圖 1：溫蒂想買條皮手鐲。

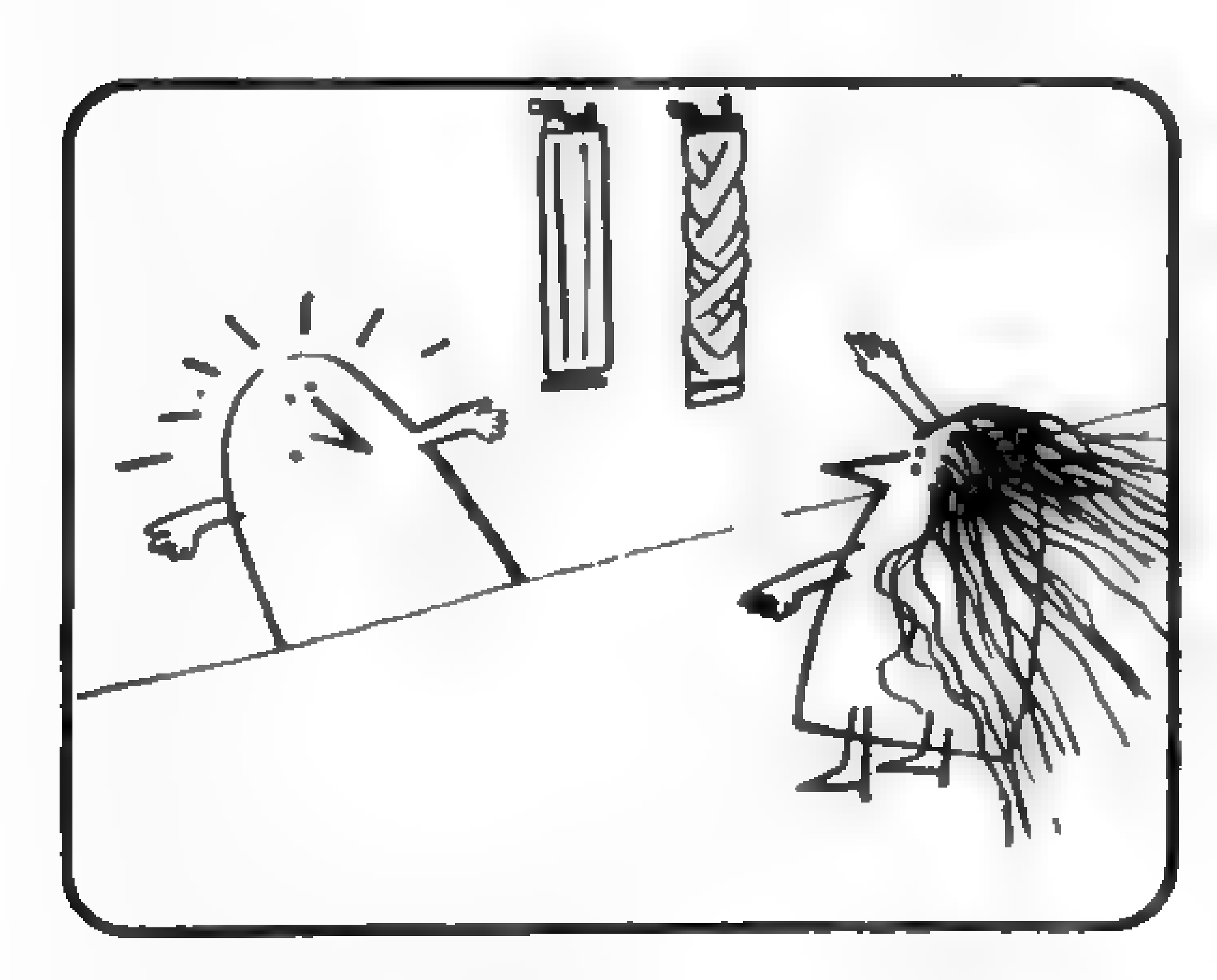


圖 2：在路克皮飾店中，她看到兩條手鐲，都是由三條帶子組成，一條是辮子狀，一條是素面的。溫蒂：「那條像辮子一樣的多少錢?」

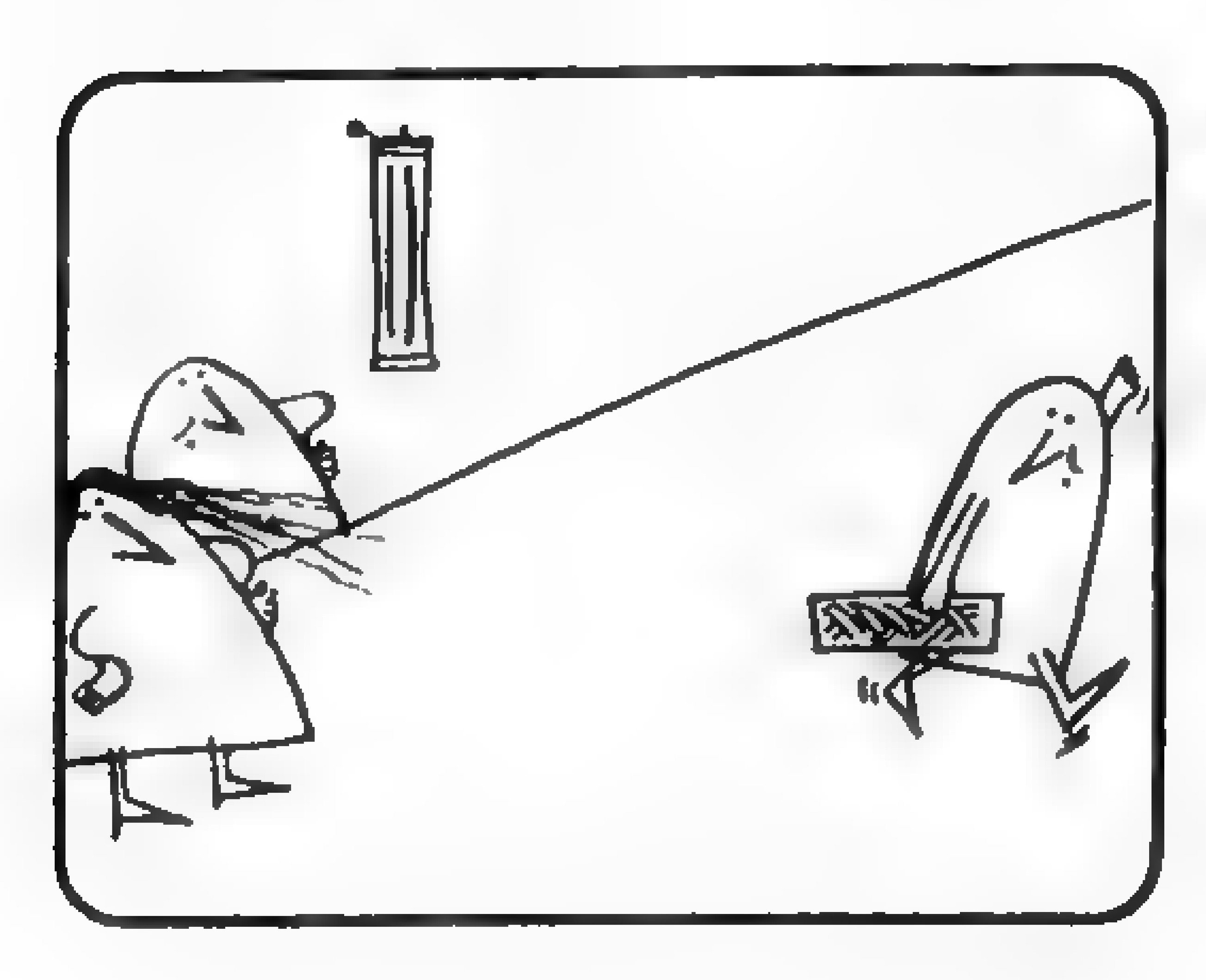


圖 3：路克：「小姐，一條五元，不過您來晚了，我已經把它賣掉了。」溫蒂：「真可惜！你有別條嗎?」

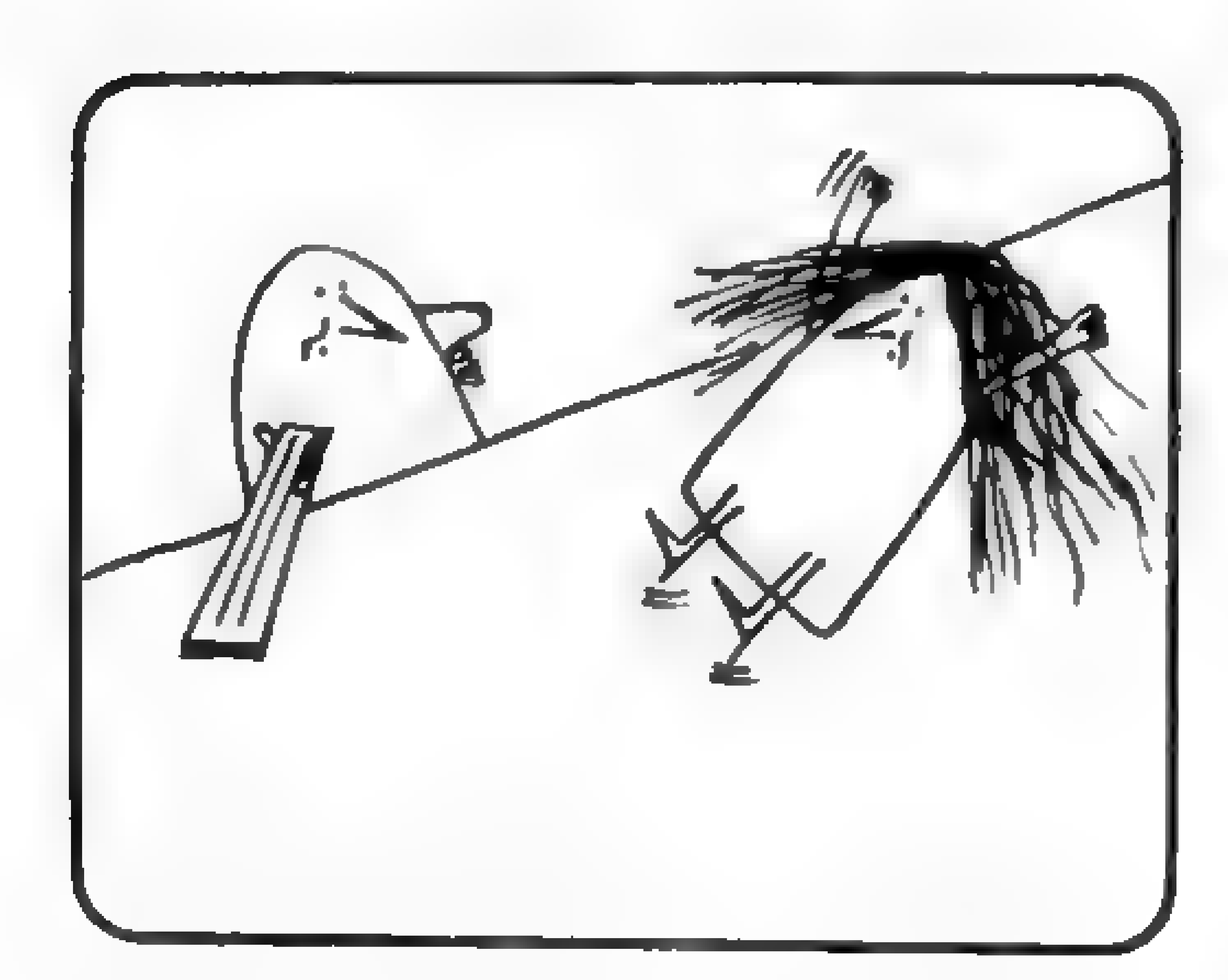


圖 4：路克：「有的，還有這條。」溫蒂：「可是它是素面的。」路克：「小姐，我很樂意把它編成像辮子一樣。」

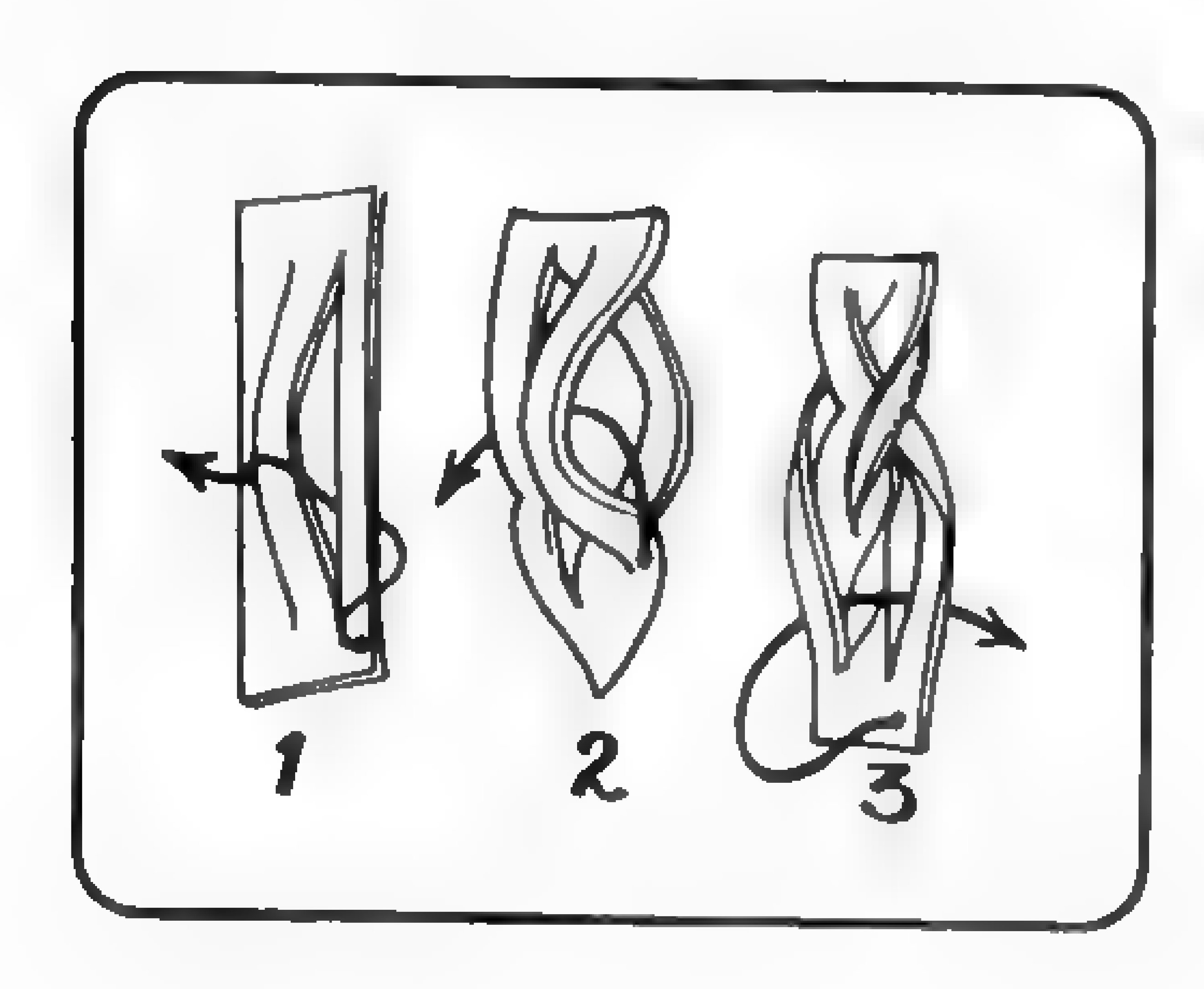
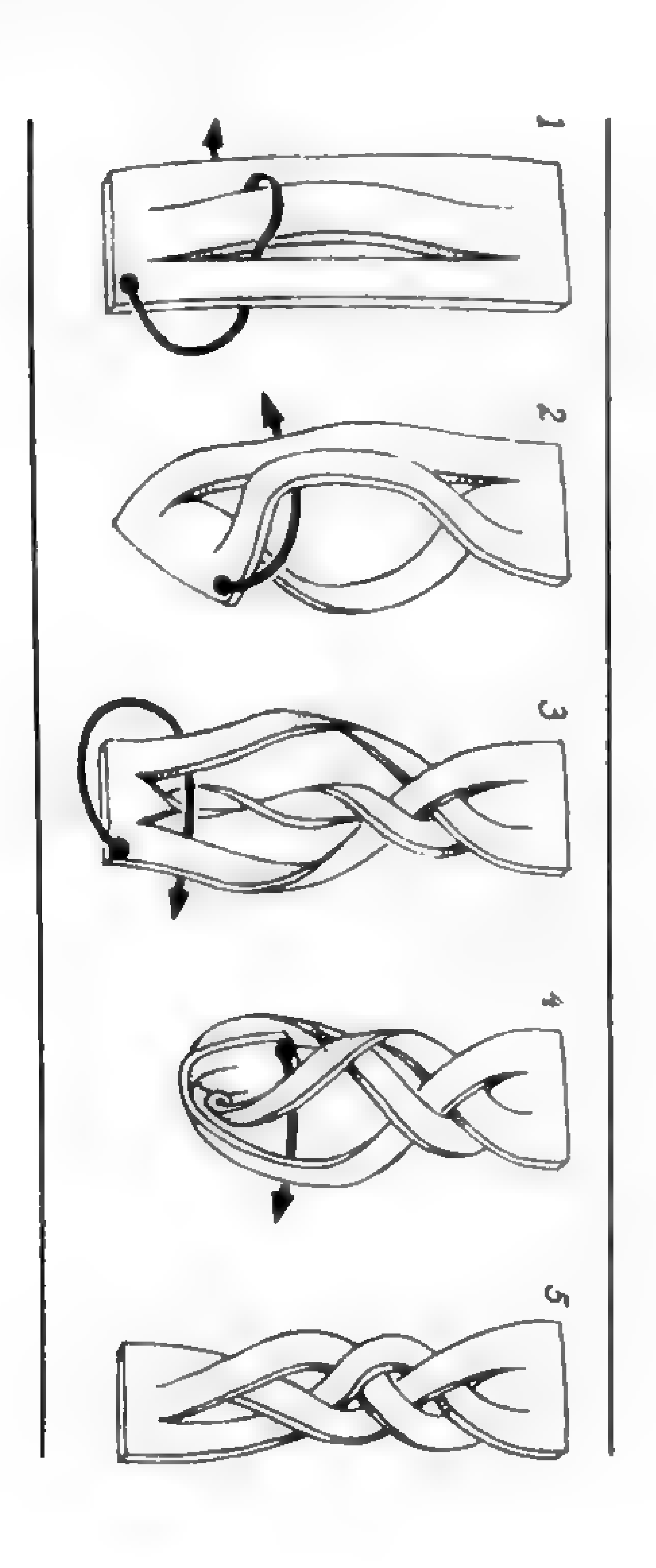


圖 5：看起來好像不可能，不過路克在三十秒內就把手鐲編好，而且不用一刀一剪。圖中是他的作法。

令人驚奇的是這條手鐲上雖然有六個交叉點，可是不用剪開底端就可以編成。左圖說明了編辮子的過程，如果用更長的辮子重覆編，只要編成的交叉點是六的倍數即可。要把一塊僵硬的皮編成眞正的辮子手鐲，先得把它浸在溫水裏，皮才會變軟。



不可思議的物體

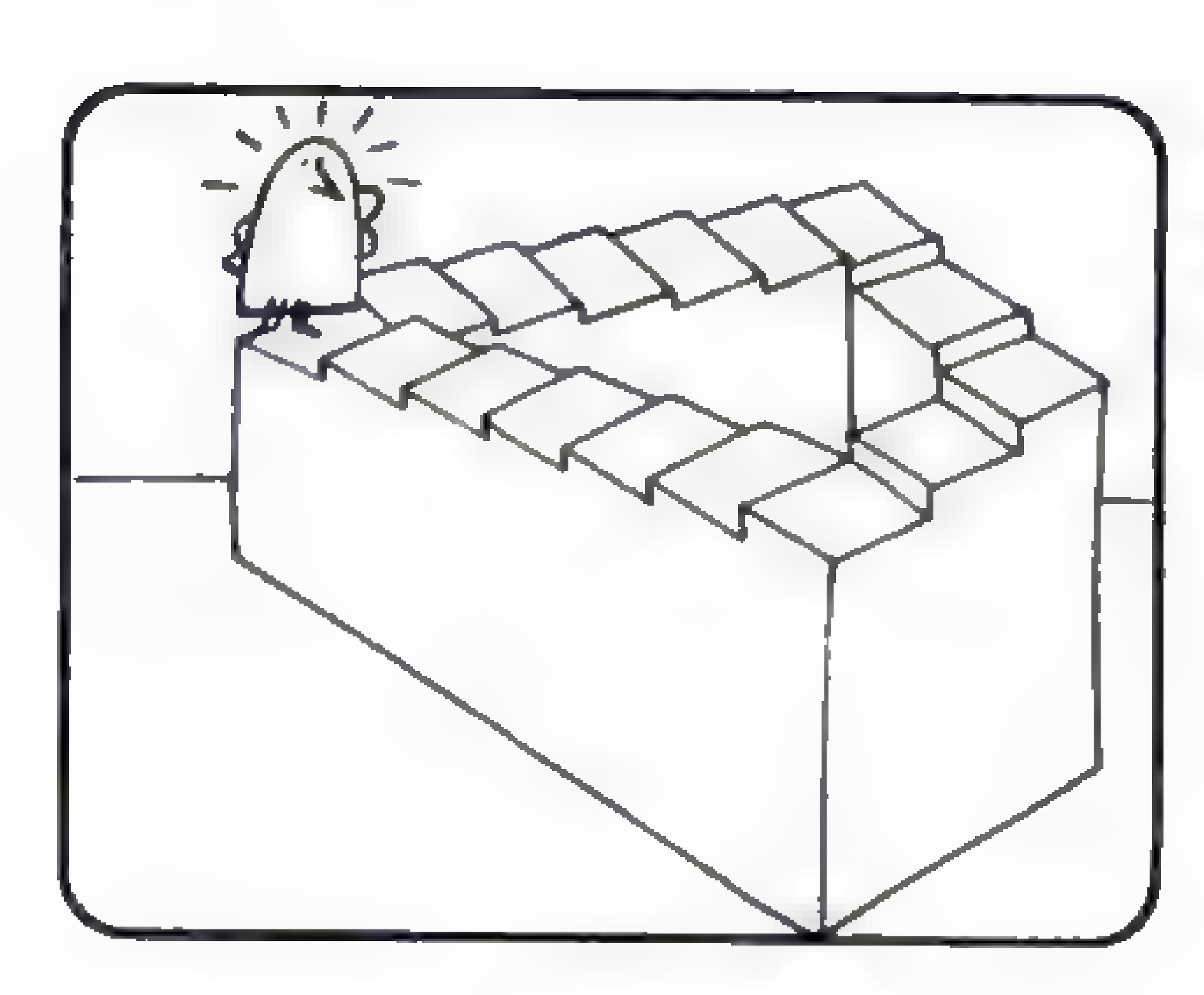


圖 1：看到這個樓梯，你會驚訝嗎？你可以永遠繞著樓梯走，永遠往上爬，卻總是回到原點。

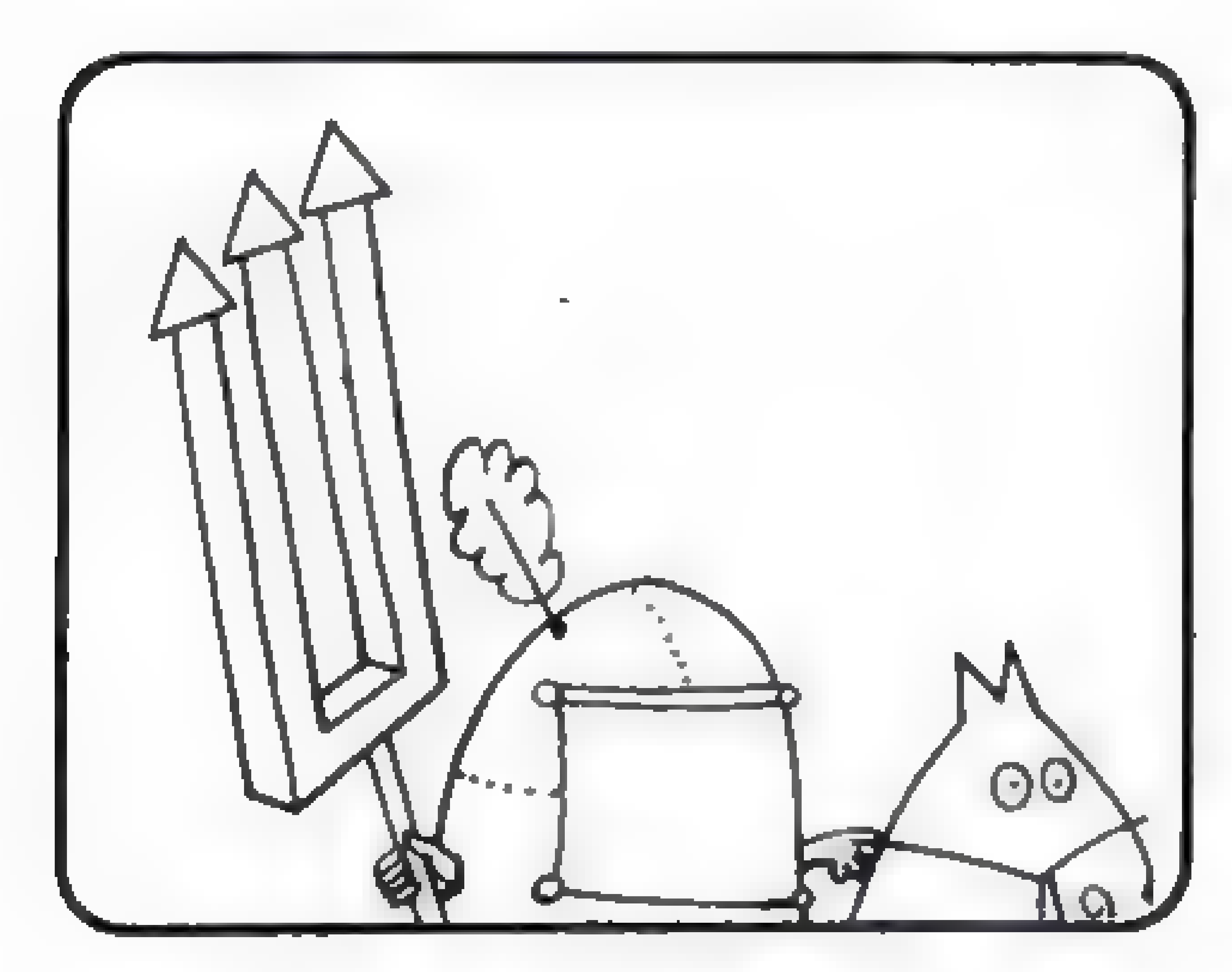


圖 2：這個騎士的武器上，有兩支還是三支叉？

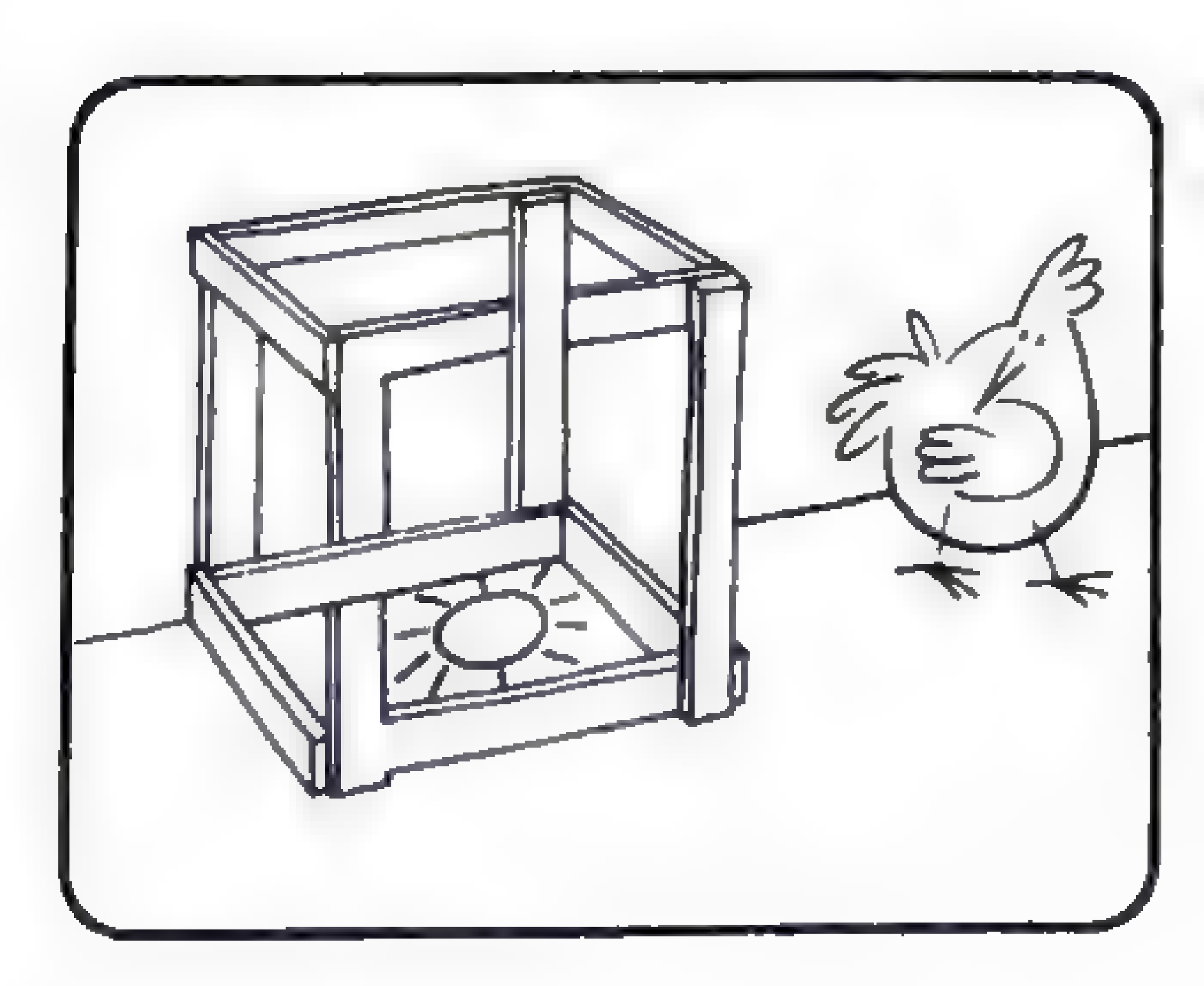


圖 3：你能蓋得出這樣不可思議的雞籠嗎？

這個樓梯、武器和雞籠，統稱為「不可思議的物體」(impossible objects)或「模稜兩可的圖形」(undecidable figures)。那座不可思議的樓梯，是由英國的遺傳學家彭羅斯(Lionel S・Penrose)和他是數學家的兒子一起發明的，於一九五八年第一次上市，一般叫它做「彭羅斯樓梯」(Penrose staircase)。有位荷蘭畫家愛才(M. C. Escher)為之著迷，運用到他的一幅版畫中—「上昇下降」(Ascending and Descending)。

中間那個兩支或三支叉的圖形，則來歷不明，一九六四年間，它在工程師間廣為流傳。那個怪異的雞籠也是來歷不明，它出現在愛才的另一幅畫—「眺遠樓」(Belvedere)中。這三個物體說明了我們是多麼容易受騙，總認為一個幾何圖形就代表一個實物結構，即使在結構上是不合邏輯、不可能存在的。這就像把模稜兩可的句子—我們在第一章中討論過的「這句話是假的」那類句子—轉化為視覺的效果。

生病的曲線

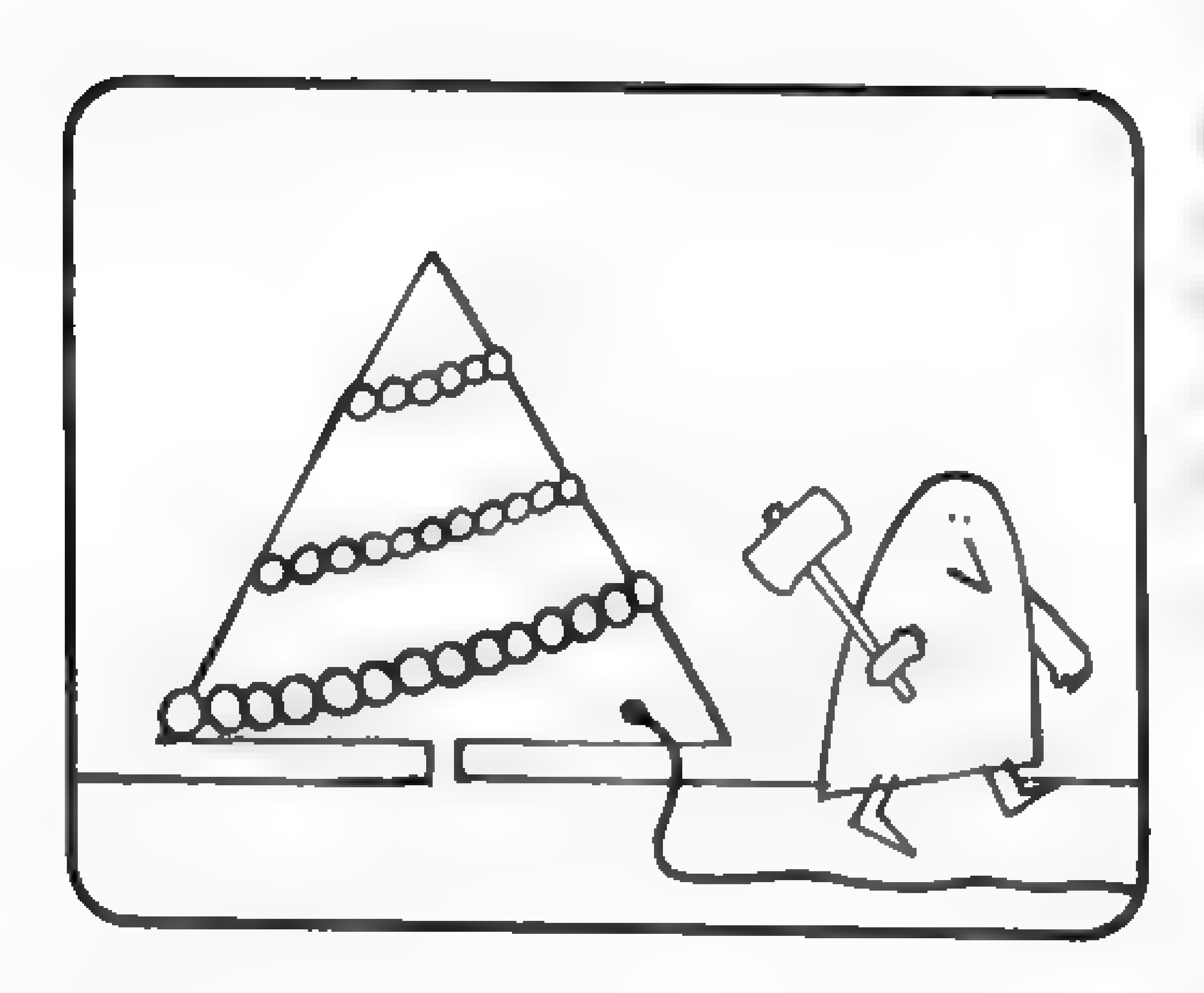


圖1：雪片的曲線是另外一種矛盾的圖案，不過並非不可能的圖案。我們就從聖誕樹的形狀──等邊三角形──來著手營造雪片的結構。

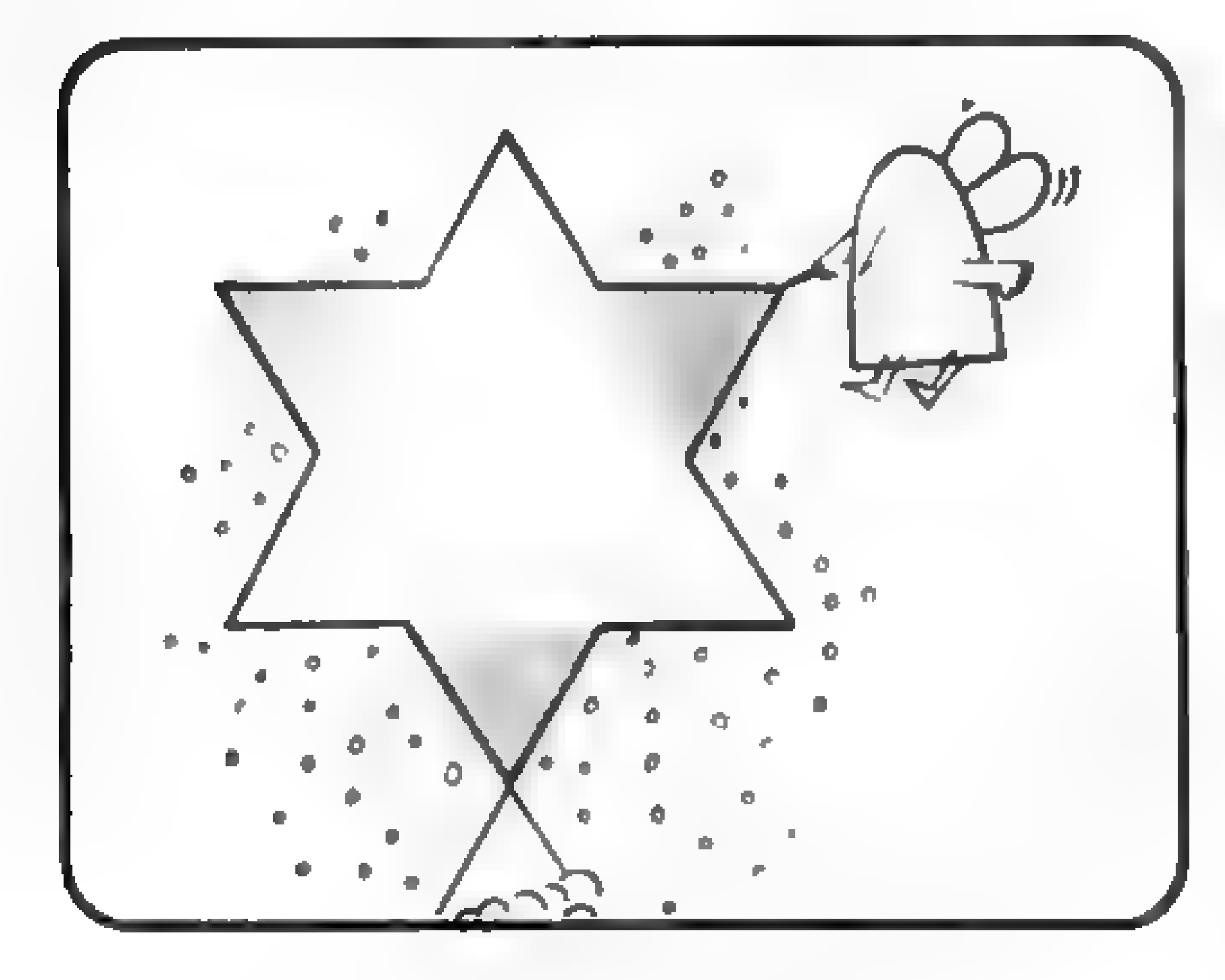


圖2：把白色部分每邊三等分，然後以中間那段爲邊，再畫個等邊三角形，如陰影部分，於是形成六角形的星星。

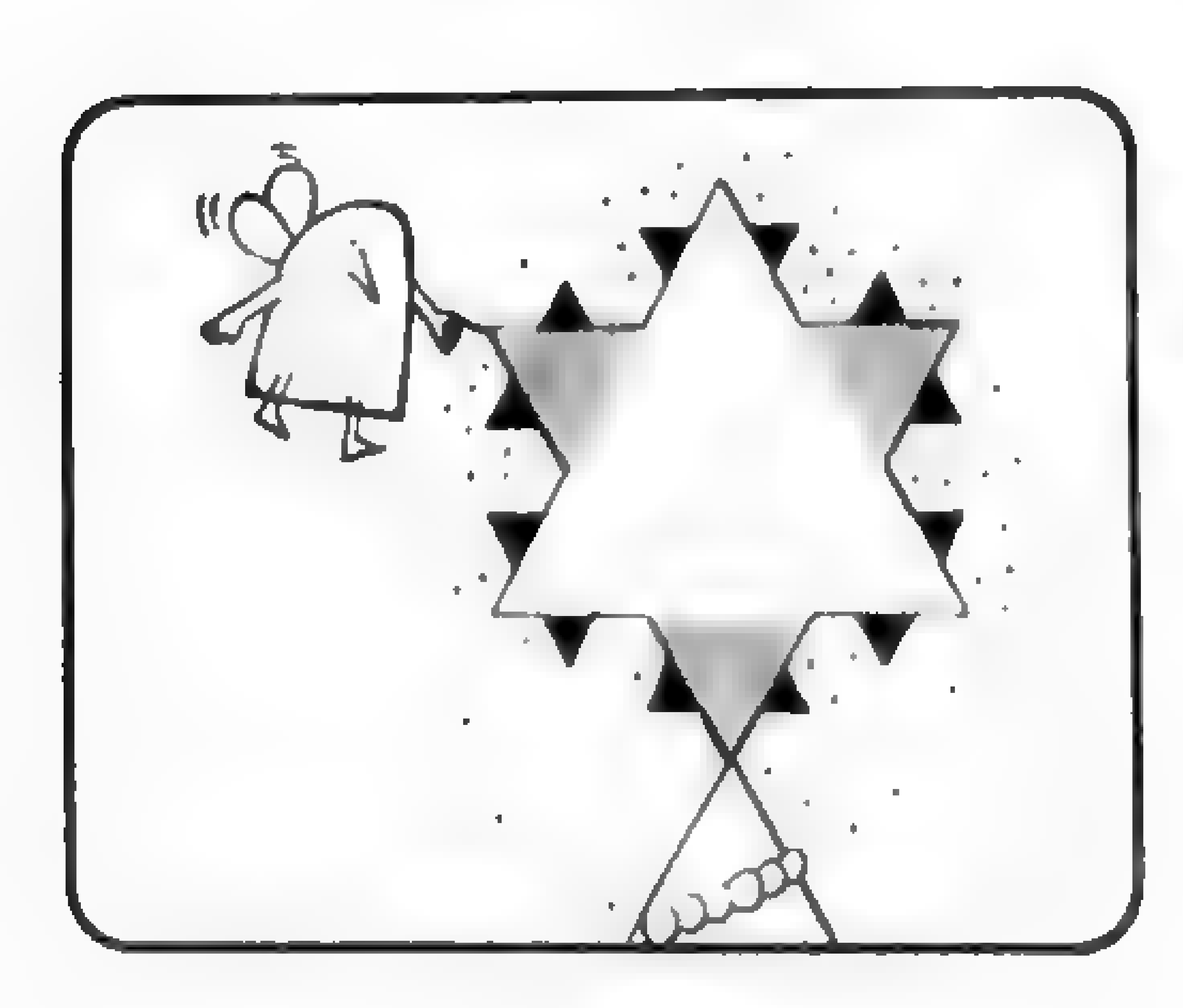


圖3：繼續重覆畫下去，直到星星的各邊都有更小的三角形，於是邊緣部分會愈來愈曲折（也愈長），形狀也開始像雪片。

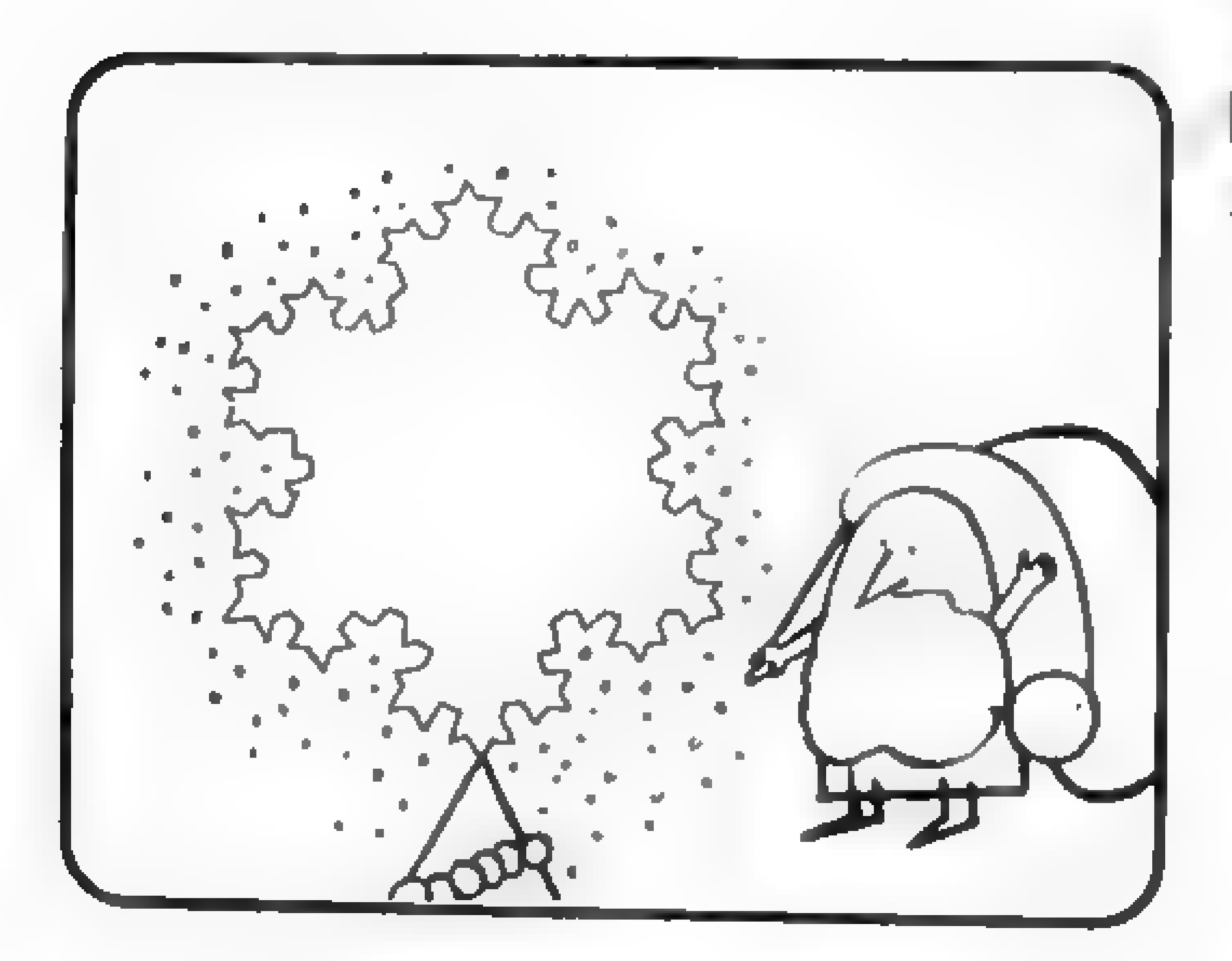


圖4：再重覆畫下去邊緣會更曲折（也更長）更美麗。

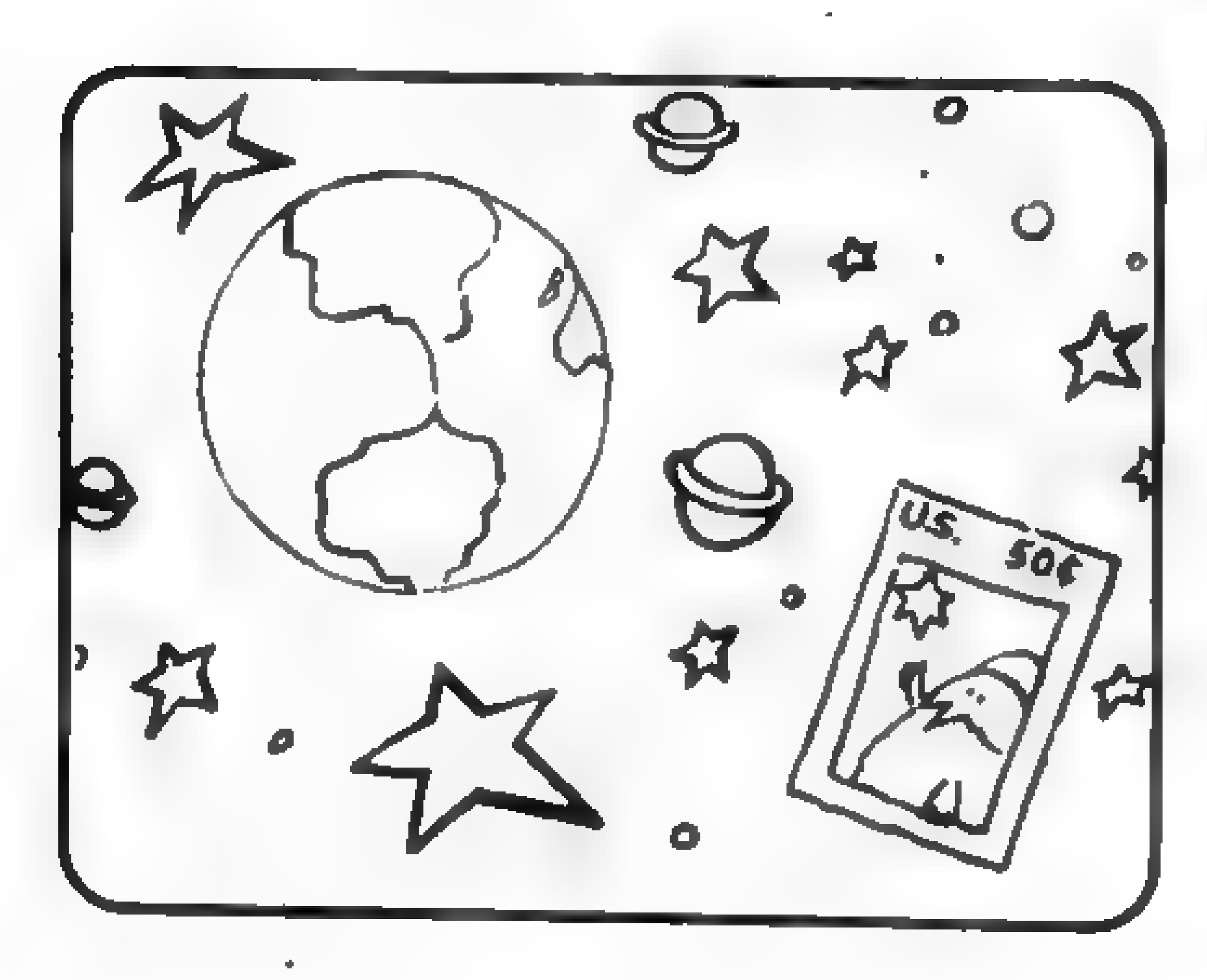


圖5：一直繼續，曲線可以變成你愛多長就多長，可以小到畫在郵票上，也可以長到從地球一直到最遠的星球。

雪片的曲線是所有無限級曲線(infinite class of curves)中最美的，它之所以被稱爲「生病的曲線」(pathological curve)是因爲它的矛盾特色。如果雪片的架構一直繼續延伸，那它的長度會變成無限長，可是它所涵蓋的面積卻是有限的。換句話說，每重覆一次過程，曲線的長度就加上去一次，形成了發散級數(divergent series)；可是它涵蓋的面積却形成收斂級數(convergent series)，總和是原來三角形面積的五分之八倍。

雪片的曲線是加強「極限」(limit)觀念的好方法。如果最原先的三角形面積爲一，那麼曲線涵蓋面積的極限是五分之八，你能說明原因嗎？

下面是一些相關的結構：

1.把原先每邊向外畫的三角形往內畫，然後擦掉這些新三角形的外緣底線，就會形成「反向雪片」(antiflake)的結構。第一次畫出的形狀會變成三個菱形相交在一點，像個螺旋狀的刀瓣。這些曲線一直畫下去，極限是不是無限長？是不是涵蓋有限的面積？

2. 如果你用其他正多邊形爲基礎，情形會變得如何？

3. 試試看在多邊形的各邊，如果不只畫一個多邊形，效果會如何？

4. 有沒有類似雪片的立體圖案？例如一個三角椎體，各面再衍生出三角椎體，會不會讓這有限的實體，具有無限的面積？它所佔的體積會是有限的嗎？

未知的宇宙

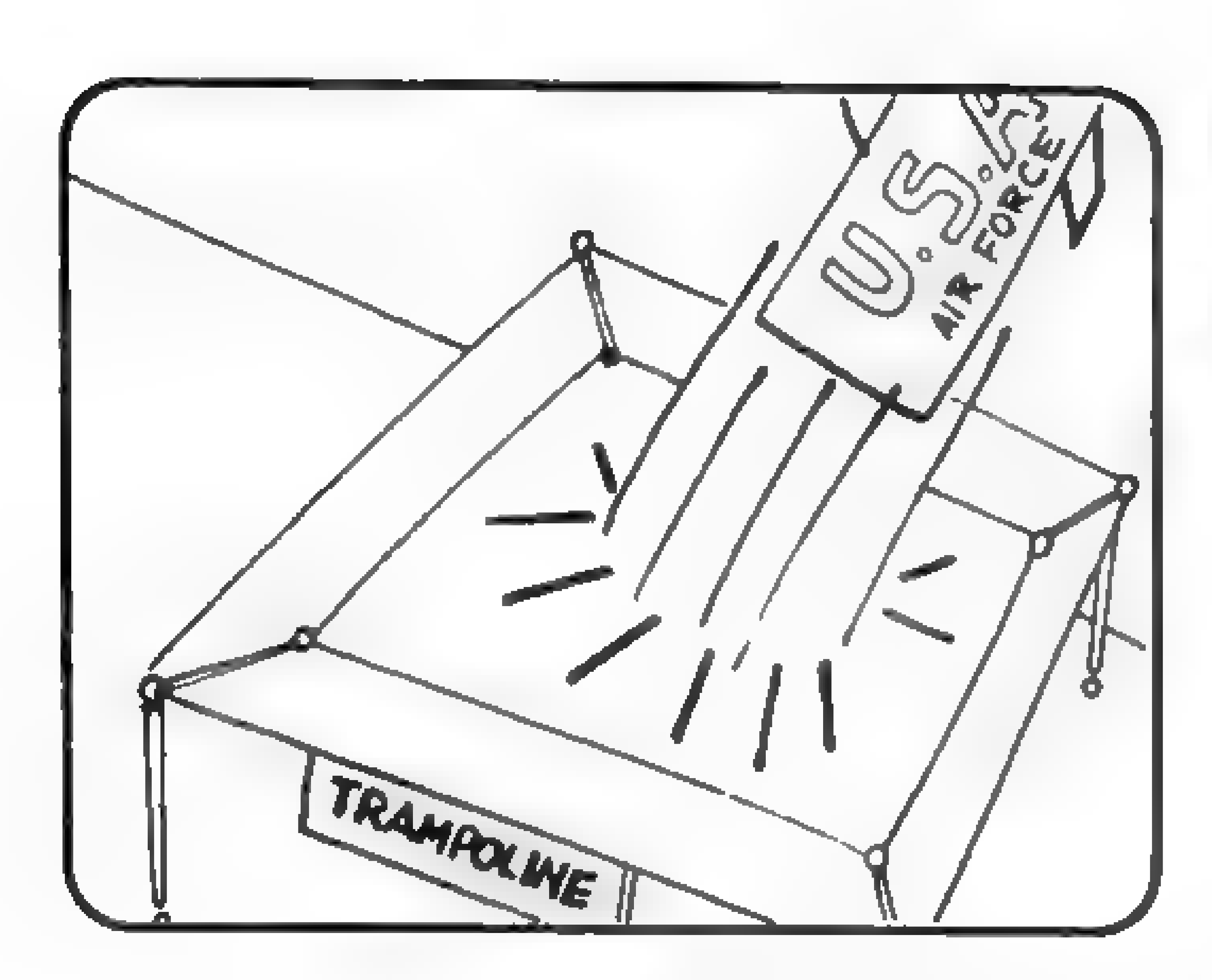


圖1：如果一艘太空船發射升空後，延著直線前進，它會離地球愈來愈遠嗎？愛因斯坦認爲也許不會，它可能會回到地球。

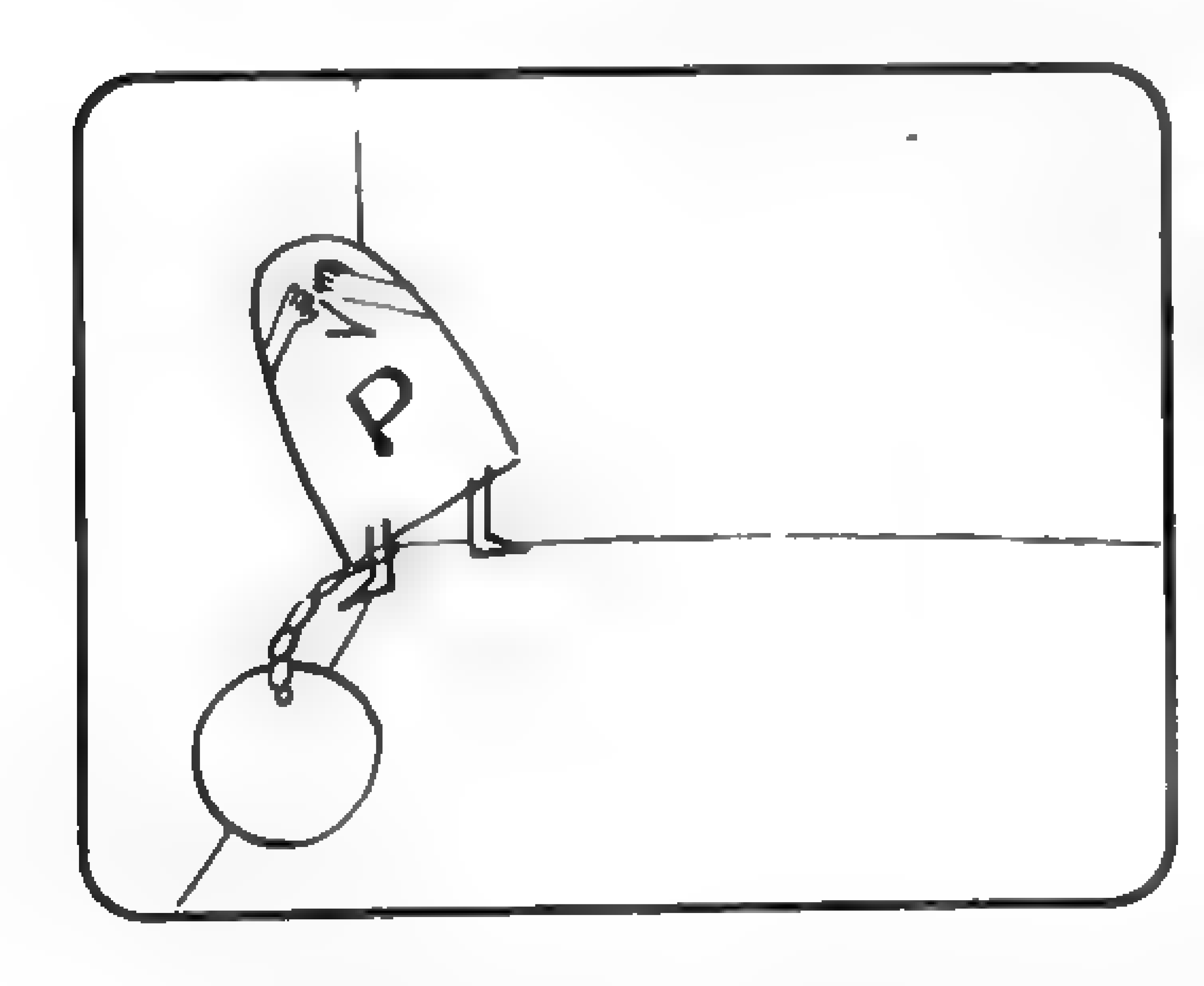


圖2：在瞭解愛因斯坦的矛盾前，我們先來看看這位「點上人」，他住在一個點上；他的宇宙沒有任何空間。

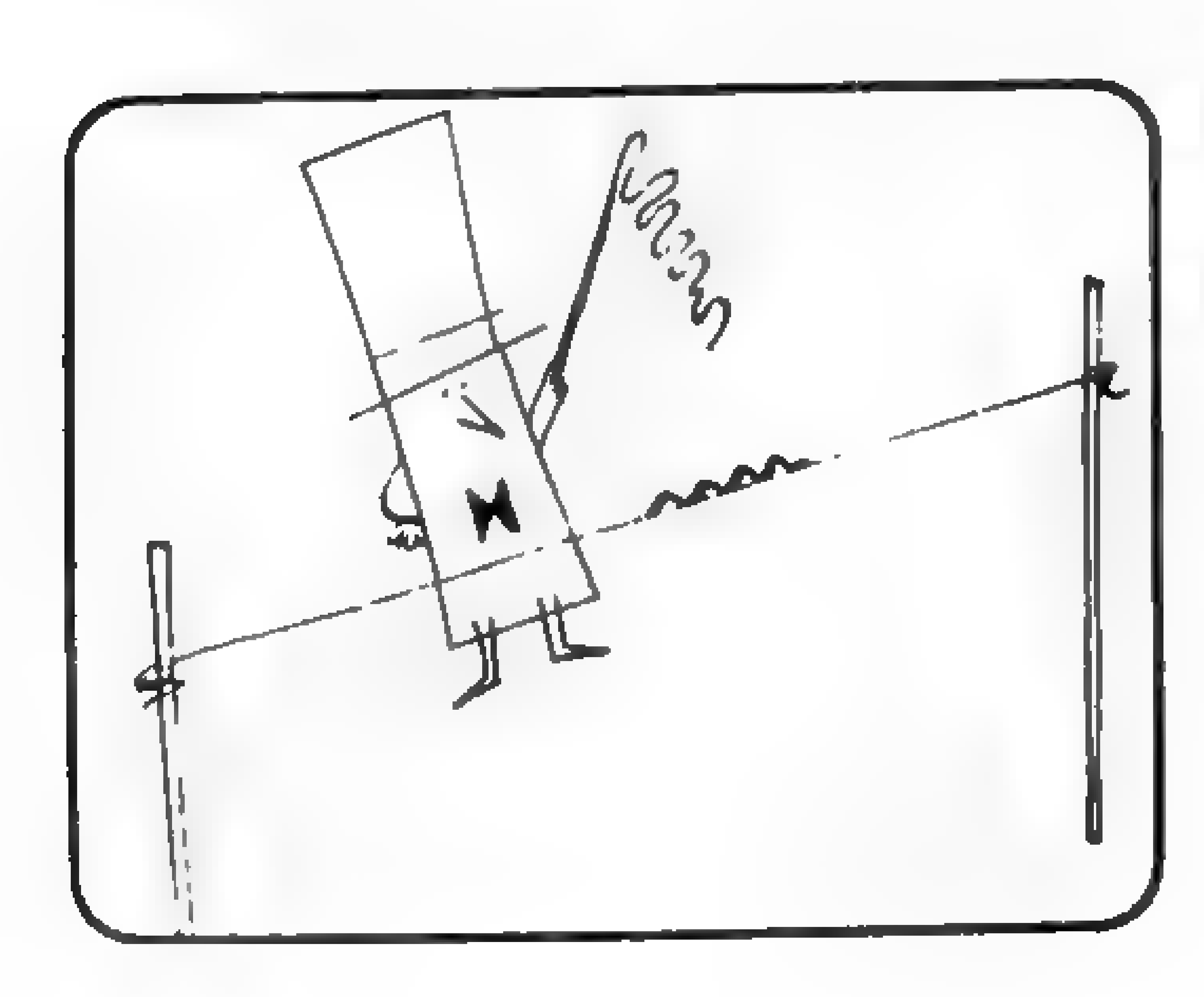


圖3：「線上人」住在一度空間的線上，就像圖中那條繩子上的蟲。如果繩子無限長，他往任何一個方向，都能永恆的旅行。

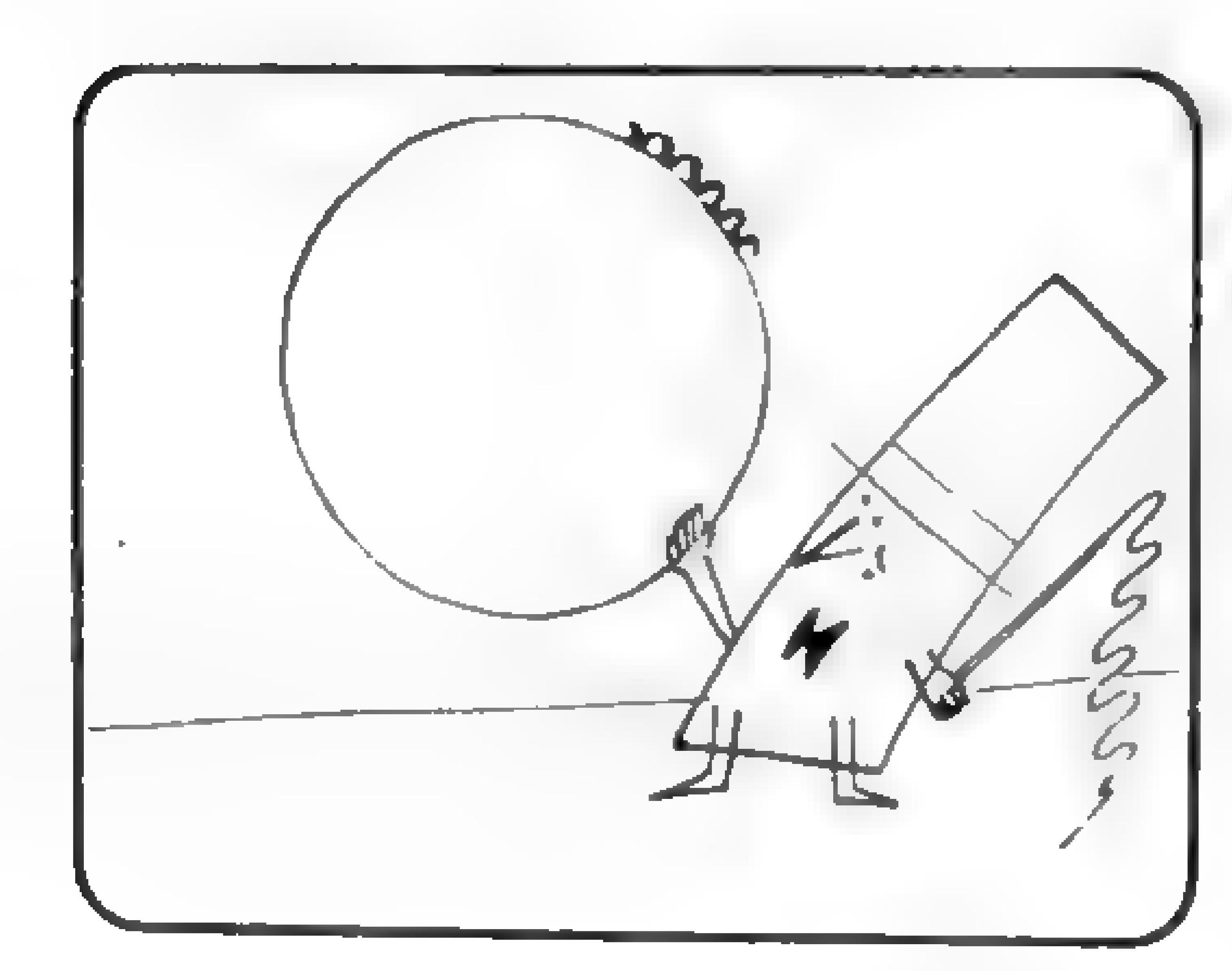


圖 4：不過，如果這條繩子像個圓圈一樣圍起來，那麼這條繩子雖然長度有限，却可讓這隻蟲無止境地爬下去。不論牠往那個方向爬，最後終會回到原點。

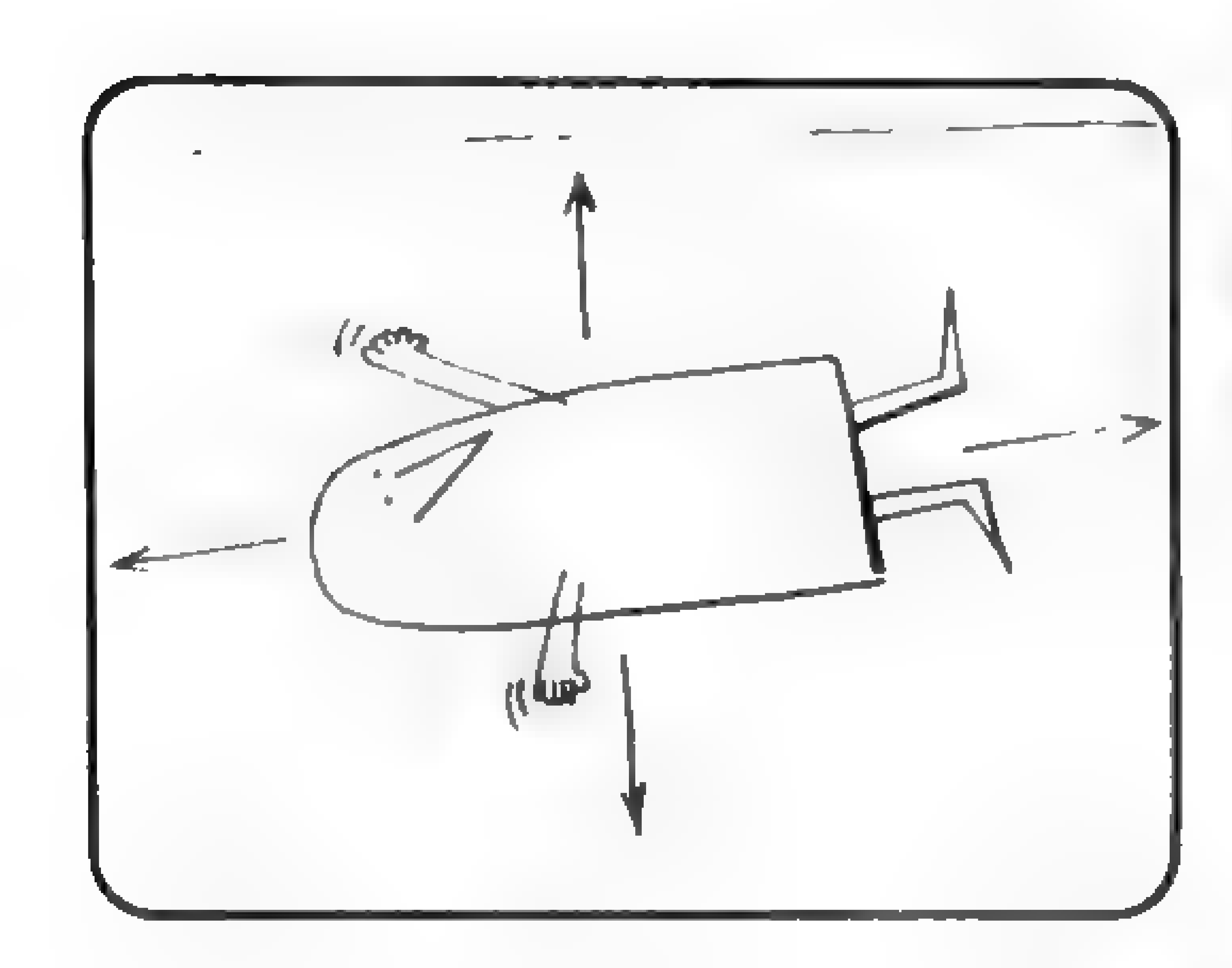


圖 5：住在二度空間平面上的人，如果他的宇宙是片無垠的平面，他往任何方向都可以無盡的走下去。

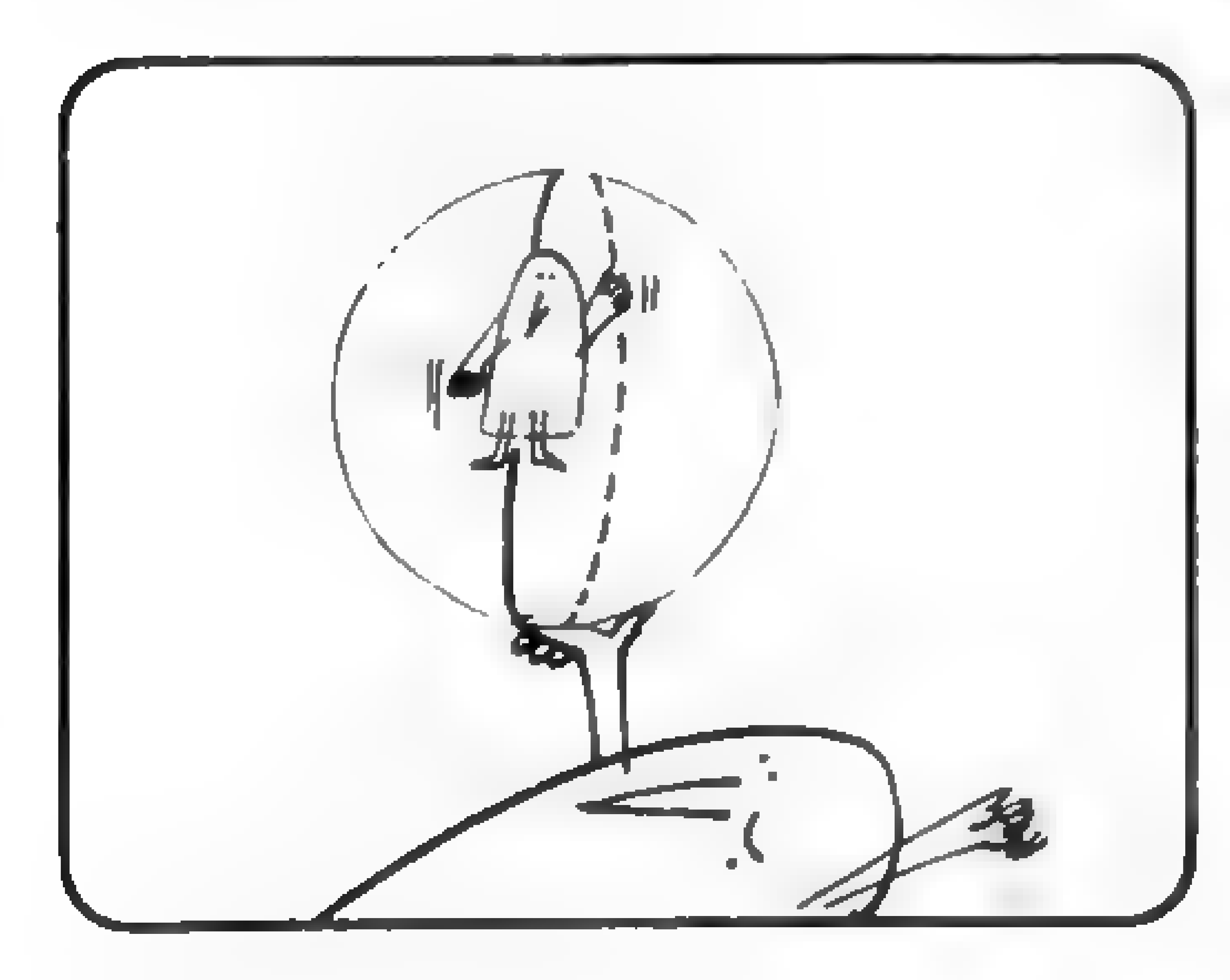


圖 6：可是如果這個平面像個球面，那麼它也變成有限而無邊界。無論他往任何方向走，只要沿著直線前進，都會回到原點。

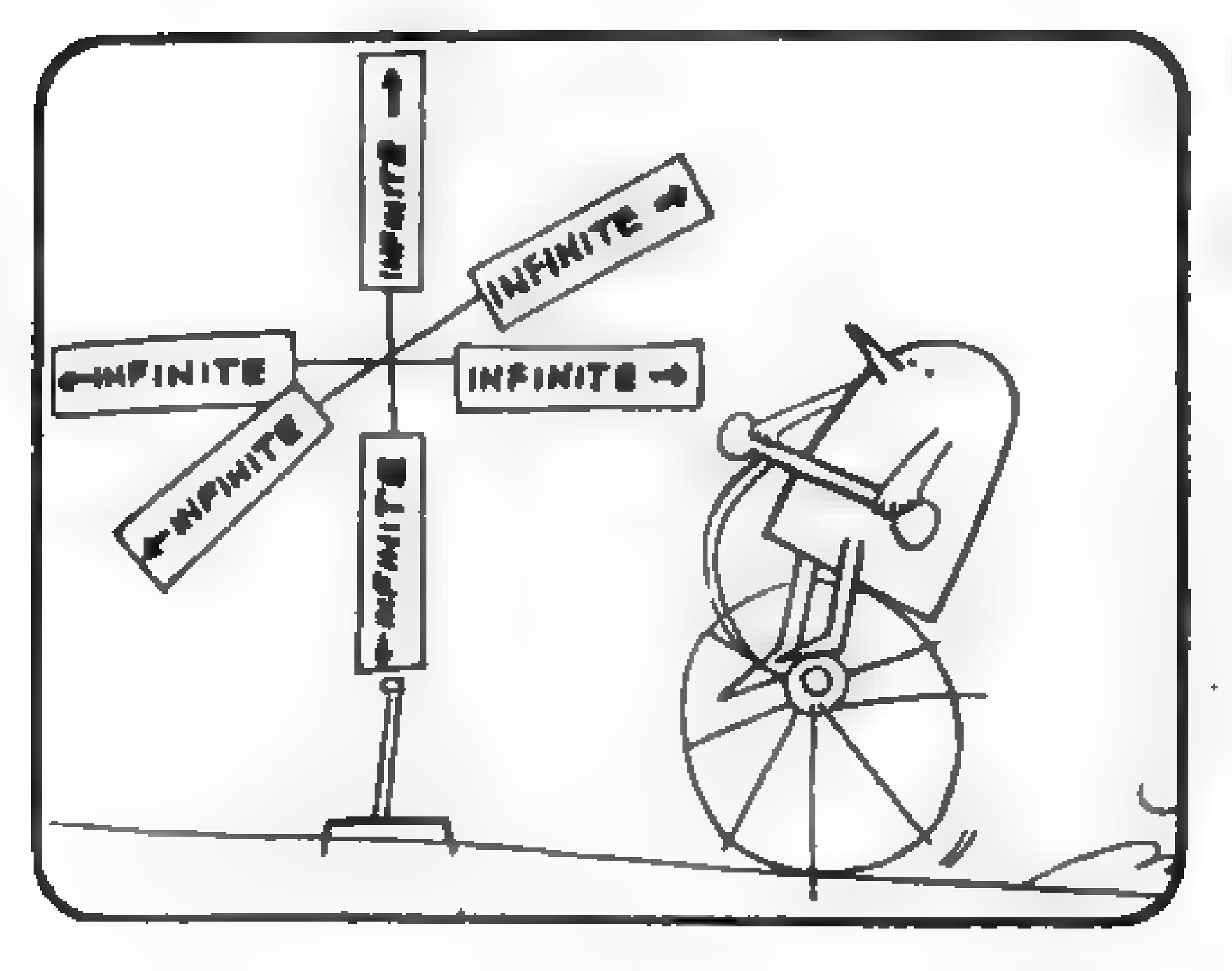


圖 7：你我都是住在三度空間裏的人，也許各個方向都能無限延伸出去。

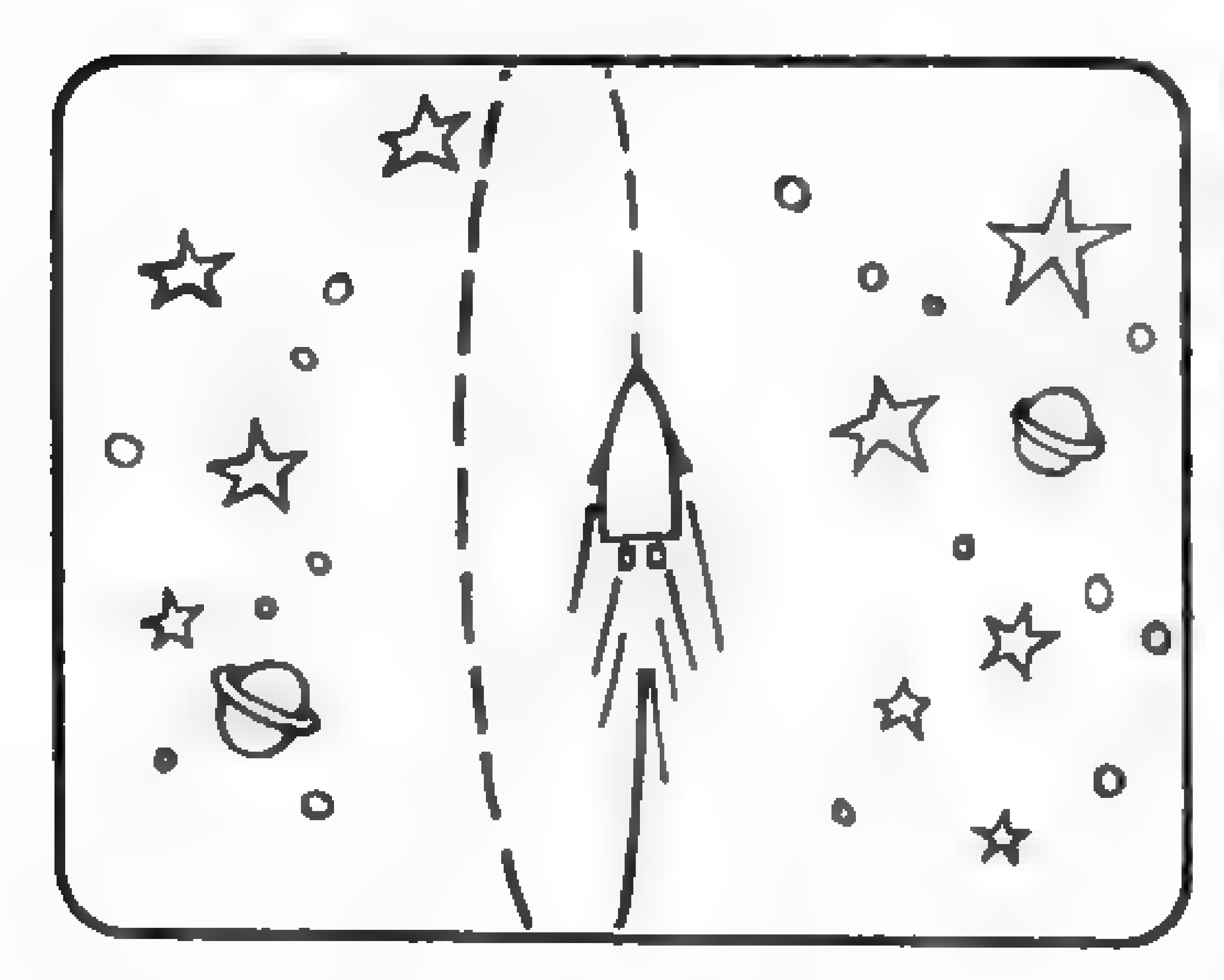


圖 8：或者像愛因斯坦認爲的，它經過更高的空間後，彎回來形成一個有限卻無邊際的宇宙。一艘太空船快速通過宇宙時，沿著最可能的直線前進，最後終會回到老家。

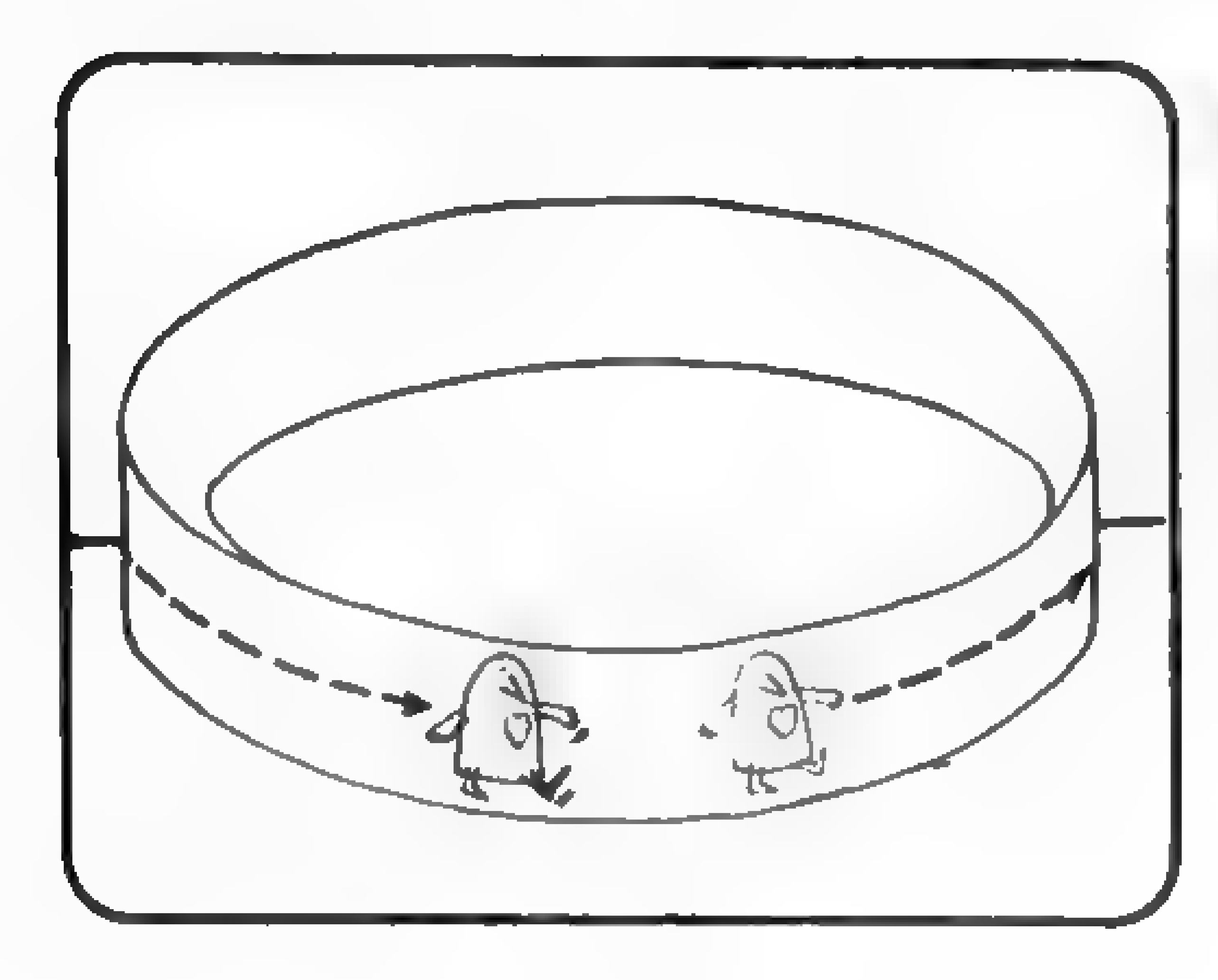


圖 9：如果住在平面上的人，繞著球形走，就像走在一條沒有扭曲的帶子上，走時心臟永遠都待在同一邊。

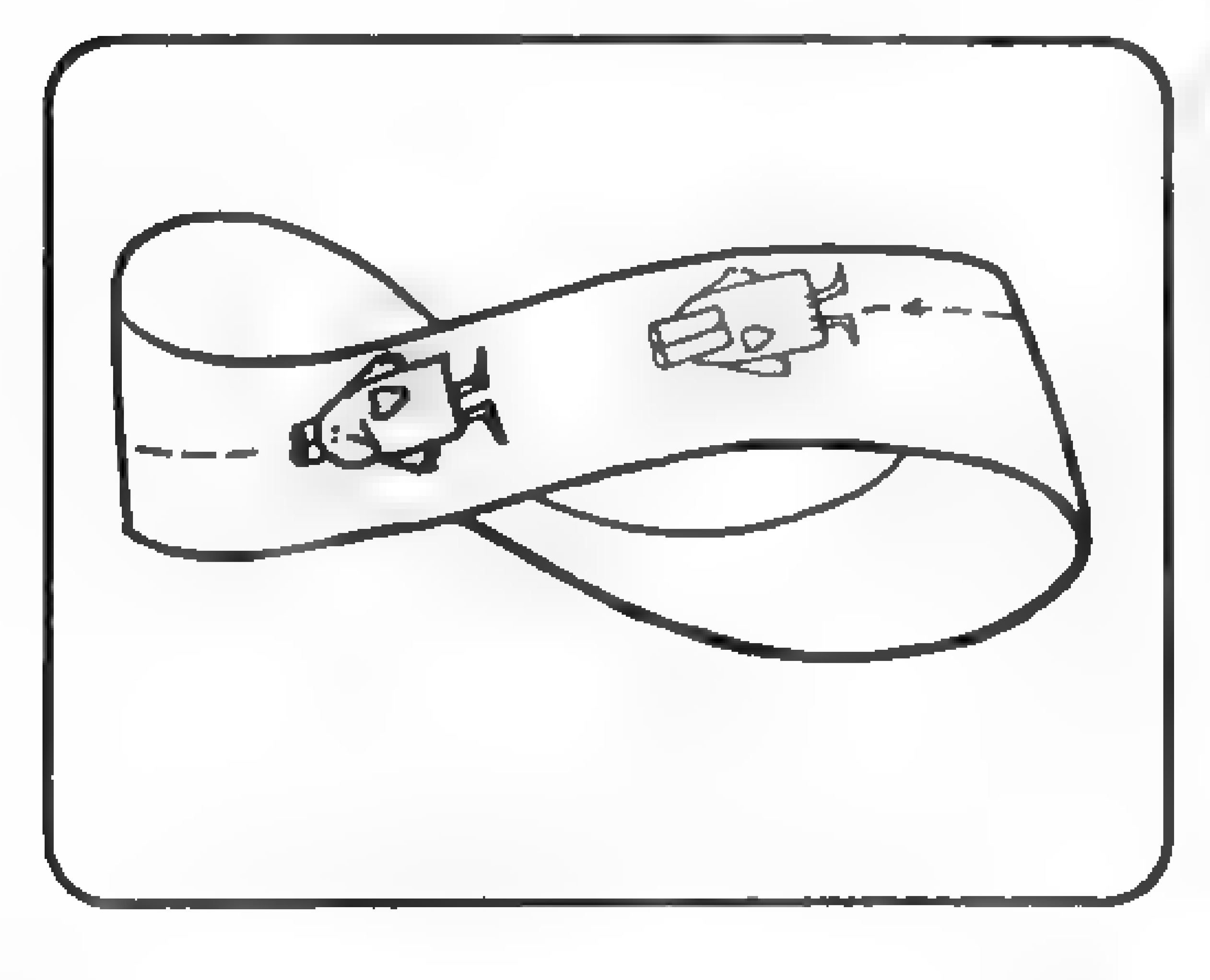


圖 10：可是如果他走在扭曲的「摩比斯帶」(Moebius band)上，就會發生奇怪的事。扭曲的帶子會使他等於是翻了一次身，所以他繞回來時，心臟會在另一邊。

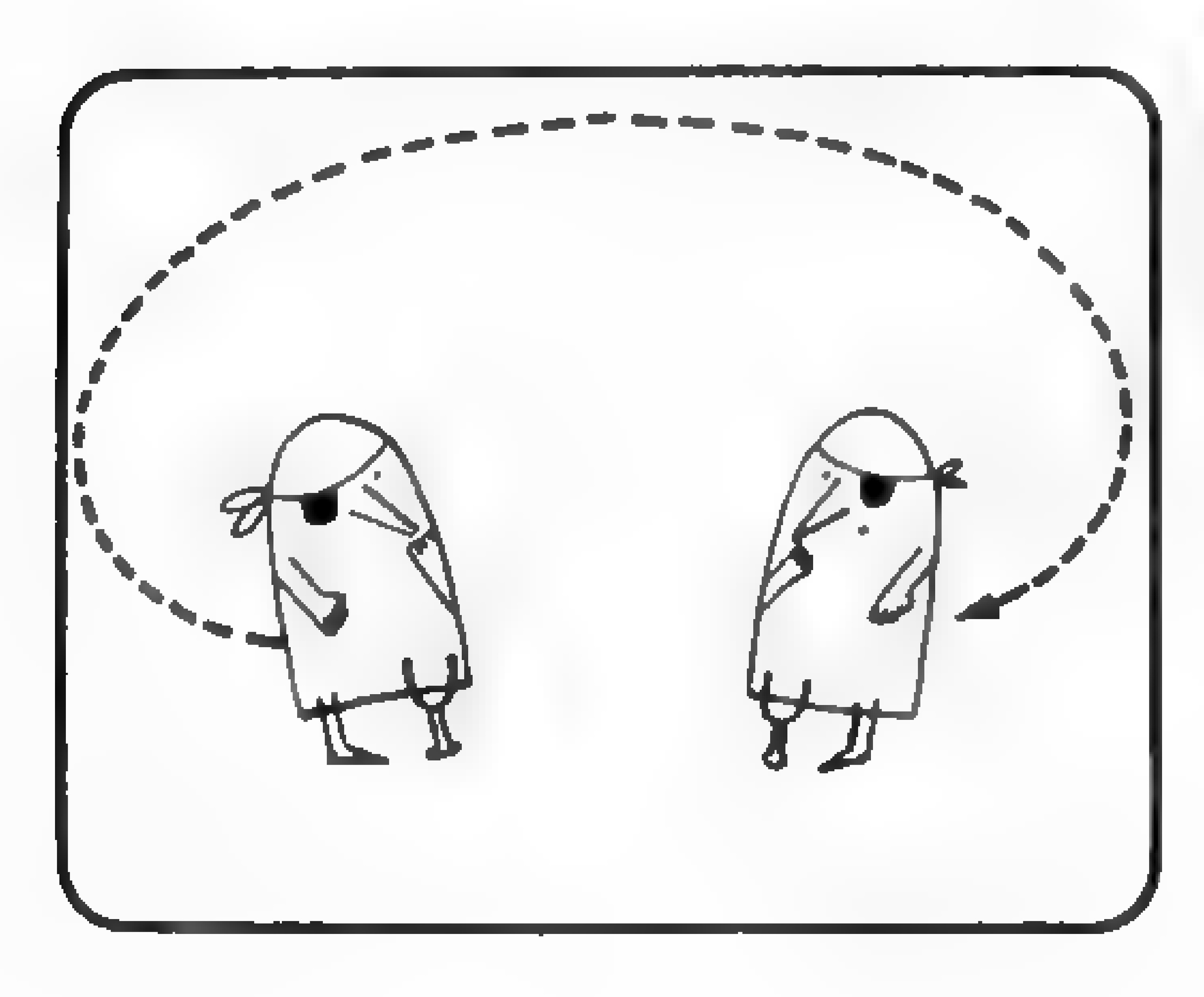


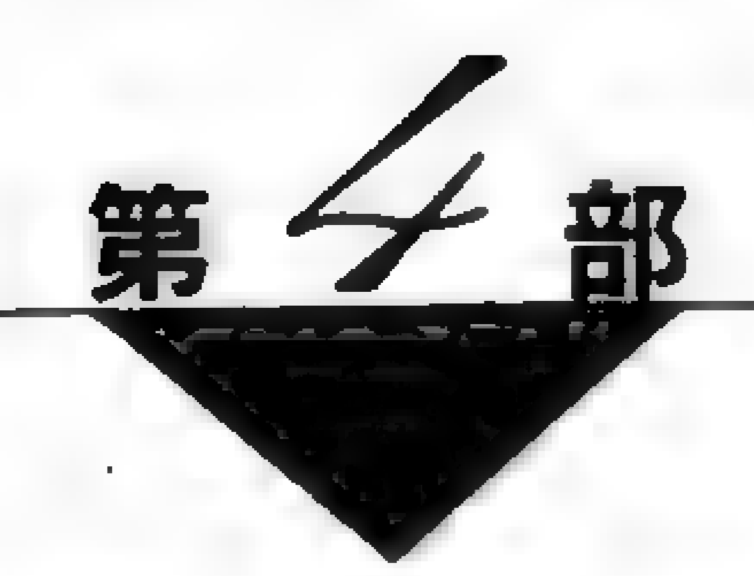
圖 11：如果我們的空間是封閉的，它可能像摩斯比帶一樣的扭曲。太空人繞著太空旅行一圈，回來時整個人都倒反過來。

太空人目前還不知道我們所處的宇宙是像愛因斯坦所說是封閉的，或是開放的，這完全得看宇宙中有多少物質而定。根據廣義相對論，空間的物質會造成空間彎曲，而彎曲的幅度隨物質比例的增加而增加。今天多數的宇宙學家認爲，目前尚無足夠的物質能夠把宇宙彎曲到封閉的程度。不過這個問題仍有討論餘地，因爲目前宇宙中物質的性質和密度仍屬未知，也許宇宙含有足夠的「潛在物質」(hidden matter)足以把自己封閉起來。

目前尚無證據證明「我們的宇宙空間是扭曲的」的說法（就像摩比斯帶），不過宇宙學家喜歡發明各種不同的宇宙模型，其中有些模型主張空間是扭曲的。要明白住在平面上的人，繞完摩比斯帶後，回來時爲什麼是顛倒的，就得先明白這條帶子是無厚度的。可是，用紙做成的摩比斯模型，因爲有厚度所以是立體的。我們必須假設眞正的摩比斯帶表面是無厚度的。

在摩比斯帶上畫個平面圖，就像在綿紙上用墨水畫圖，會馬上被紙吸收，紙的兩面都會有圖形，而非只有一面，也就是「嵌鑲」(embedded)到表面裏。繞完一圈

回到原點時會左右相反，當然，如果再繞一圈，就會又回到原形。依同樣的方式，如果一位太空人繞了扭曲的宇宙一圈，他回來時會左右顛倒，可是第二趟繞行，就會使他復原。



機　率

機率理論在科學的各領域中，都很重要；不止在物理學中，在生物學和社會學中更是如此。未來在小學數學中，愈來愈重視機率的時代，是指日可待的。巴特勒主教(Bishop Joseph Butler)和在他之前的其它主教都曾說過：機率正是生命的指引。從早到晚，我們在不知不覺中作了數以千計而結果未知的小賭注。如果量子力學(quantum mechanics)在物理學上已成定論，那麼純粹的機率就是所有自然現象的基本法則。

在數學的所有領域中，由機率得出的結果是最與直覺相衝突的，常常用機率算出的正確答案，都和常識剛好相反。譬如說，如果你走進一步電梯，你會預期電梯往上昇的機率是五〇%，很矛盾的，其時這多半不對。又如果一個家庭有四個小孩，你會預期最可能的情況是男女各兩個，這個預期也不對。

本章中所介紹的機率，都是些簡單的概念，能幫助你瞭解爲什麼在擲骰子的賭博中，看起來玩者有利，其實是不利的。更廣泛來說，這些概念可用來瞭解一些驚人的巧合其實另有玄機，這點將在下章中說明。

本章中所列舉的矛盾都經過挑選，要能容易瞭解，並且能以可隨地取材的銅板和紙牌等來說明。所有矛盾的解釋，都儘量列出所有可能的例子，捨棄以機率理論爲捷徑的解答，這樣讀者才能洞悉問題的全貌。

雖然原則上只有一種機率，但是現在習慣上把機率分成三大類：

1. **古典機率**(classical or priori probability)。古典機率中假設每個結果出現的機率都相等。如果一個事件有n個結果，而你想知道在那些結果中，某個子集合k發生的機率是多少？答案是k／n。以丟骰子爲例，如果骰子沒動過手腳，六個面都可能朝上。丟骰子時出現偶數的機率是多少？在可能出現的六種情形中（1，2，3，4，5，6），有三種是偶數（2，4，6），所以出現偶數的機率是六分之三等於二分之一。換句話說，奇數的機率也是一半。這是個公平的賭注。

2. **頻率或統計機率**(frequency or statistical probability)。這是關於可能出現、但機率並不相等的事件。我們所能做的是重覆或觀察這事件許多次，然後記下每種結果發生的頻率。例如一個灌鉛的骰子，只是看看外表不容易決定它的機率情

況，所以總是要丟好幾百次後，才能從紀錄中得到結論。比如說丟到6的機率是十分之七，而不是一個正常骰子的六分之一。

3. **歸納機率**(inductive probability)。科學家認定理論或定理可信度的工作，就是依歸納機率來完成的。由於對自然界的知識不足，所以不可能得出標準答案，而且實驗和觀察又太少，不足以估計出精確的頻率。例如一位科學家在目前他所具有的科學知識基礎下，考慮所有相關證據後，得出的結論是：宇宙中很可能有黑洞的存在。這樣得出的機率，一定不準，會隨著假設中新證據的出現而經常改變。

本章最後兩個矛盾，討論到歸納機率，下一章中的最後兩個也是。如果你閱讀更多這類的矛盾，你會發現自己已經非常深入現代機率理論和科學的深淵中。

賭徒的謬論

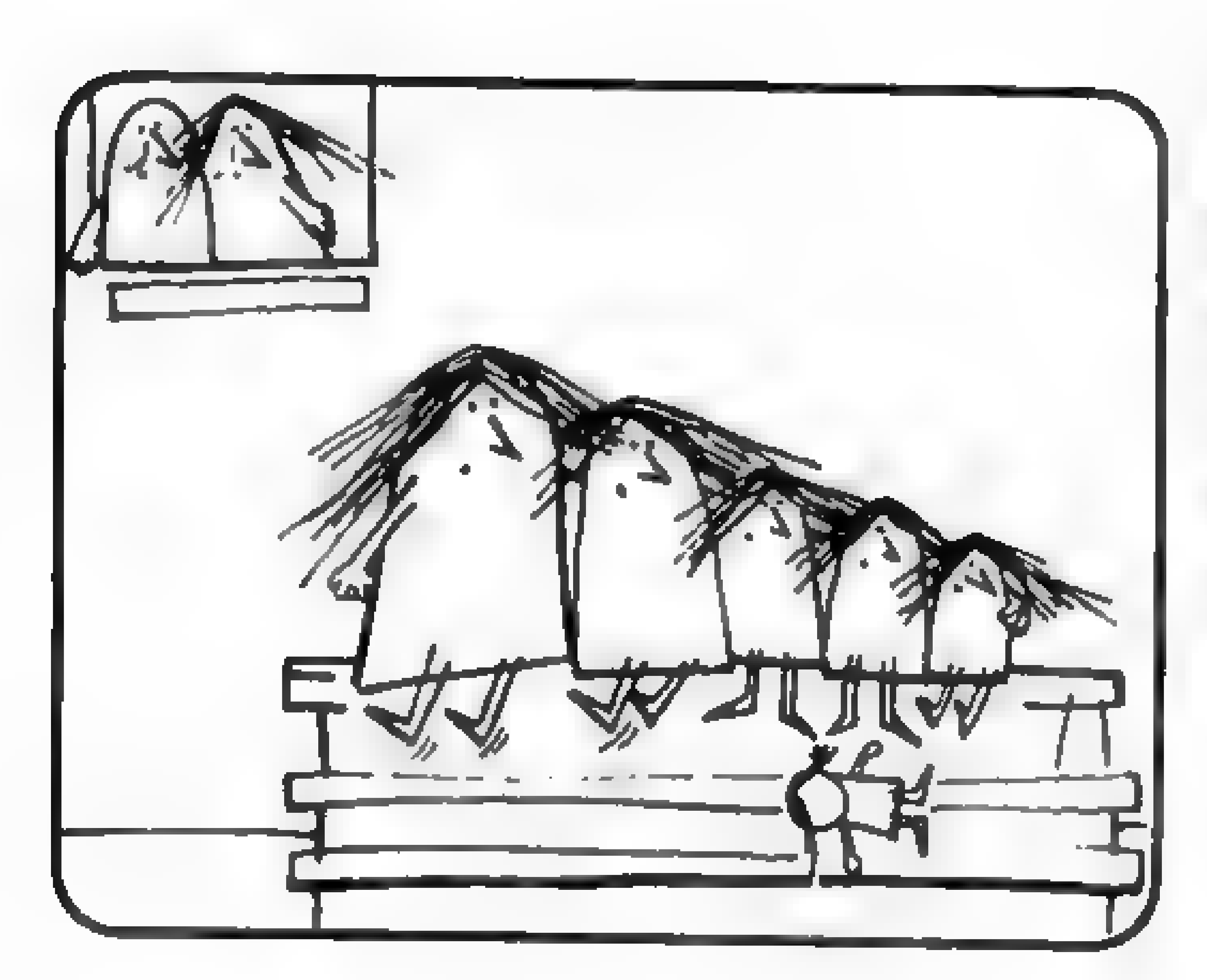


圖1：鍾氏夫婦有五個孩子，都是女孩。
鍾太太：我眞希望下個孩子別再是女孩了。
鍾先生：親愛的太太，在五個女孩之後，這個一定是男孩。
鍾先生說得對嗎？

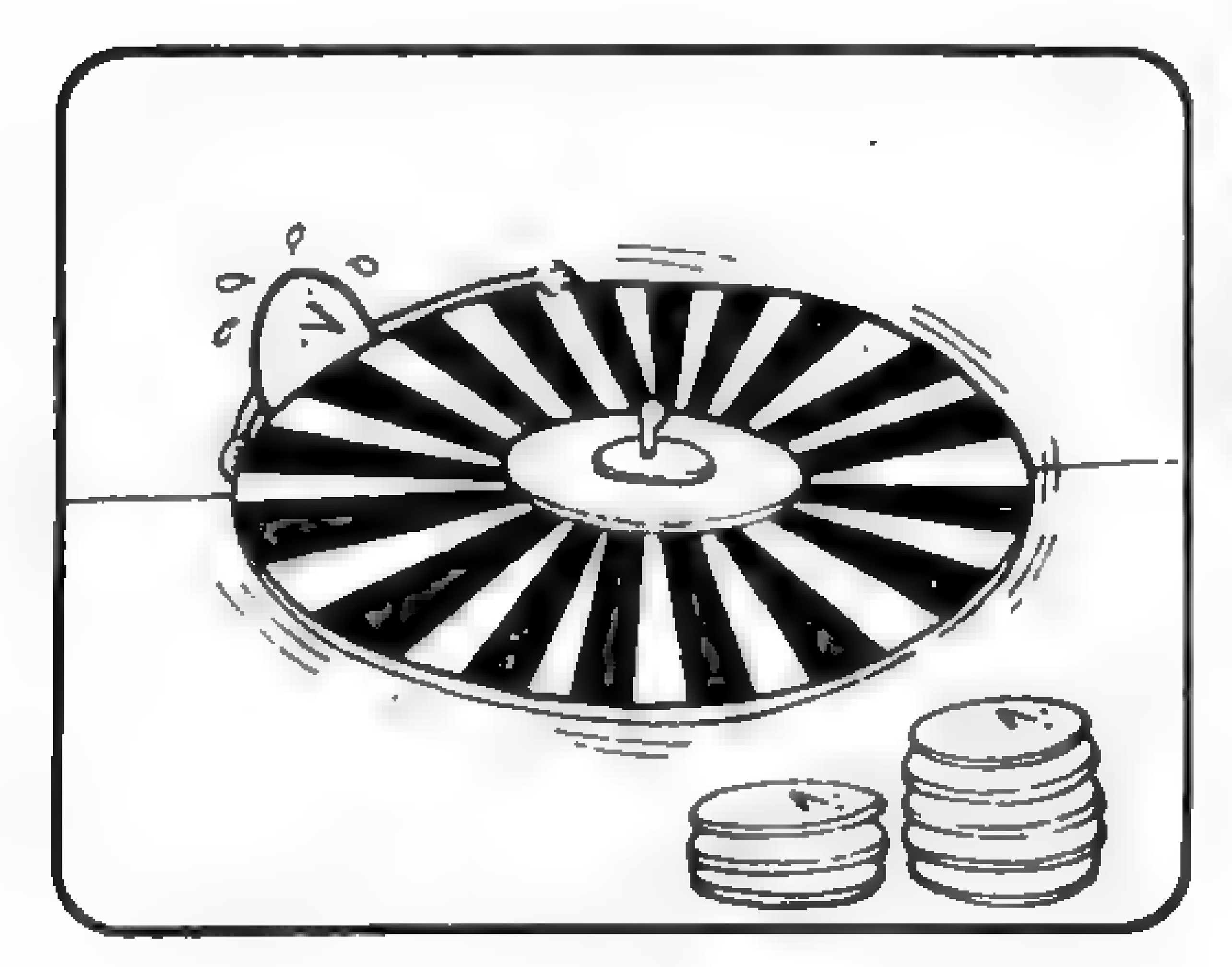


圖2：許多賭徒認爲，賭輪盤時先下注在紅色數字上，等紅色出現後（再久總會等到），再賭黑色的，這樣一定會贏。這個辦法行得通嗎？

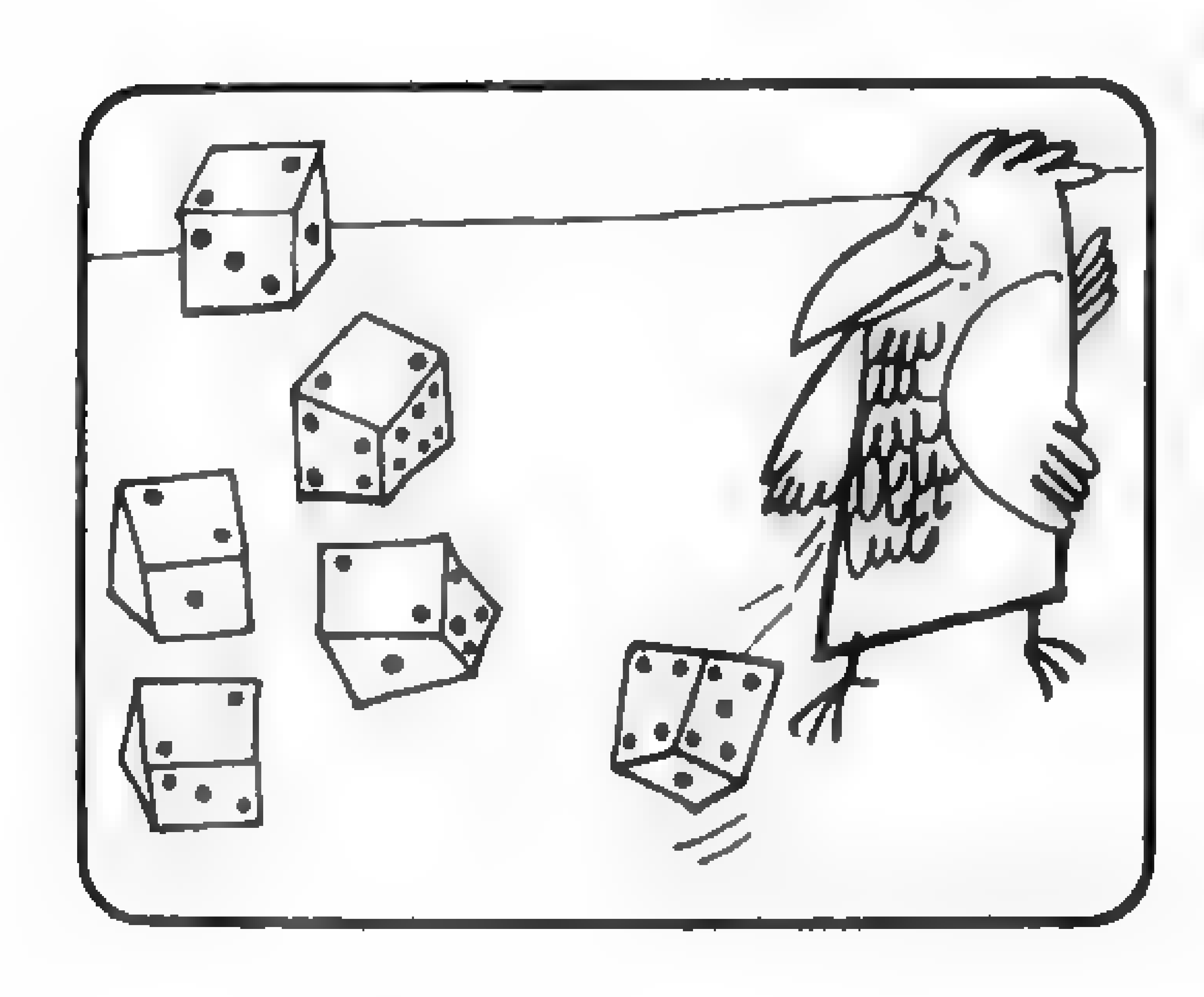


圖3：愛倫坡(Edgar Allan Poe)認爲，如果你擲骰子連續擲出了五個二，那麼你下次擲出二的機率是少於六分之一。他說得對嗎？

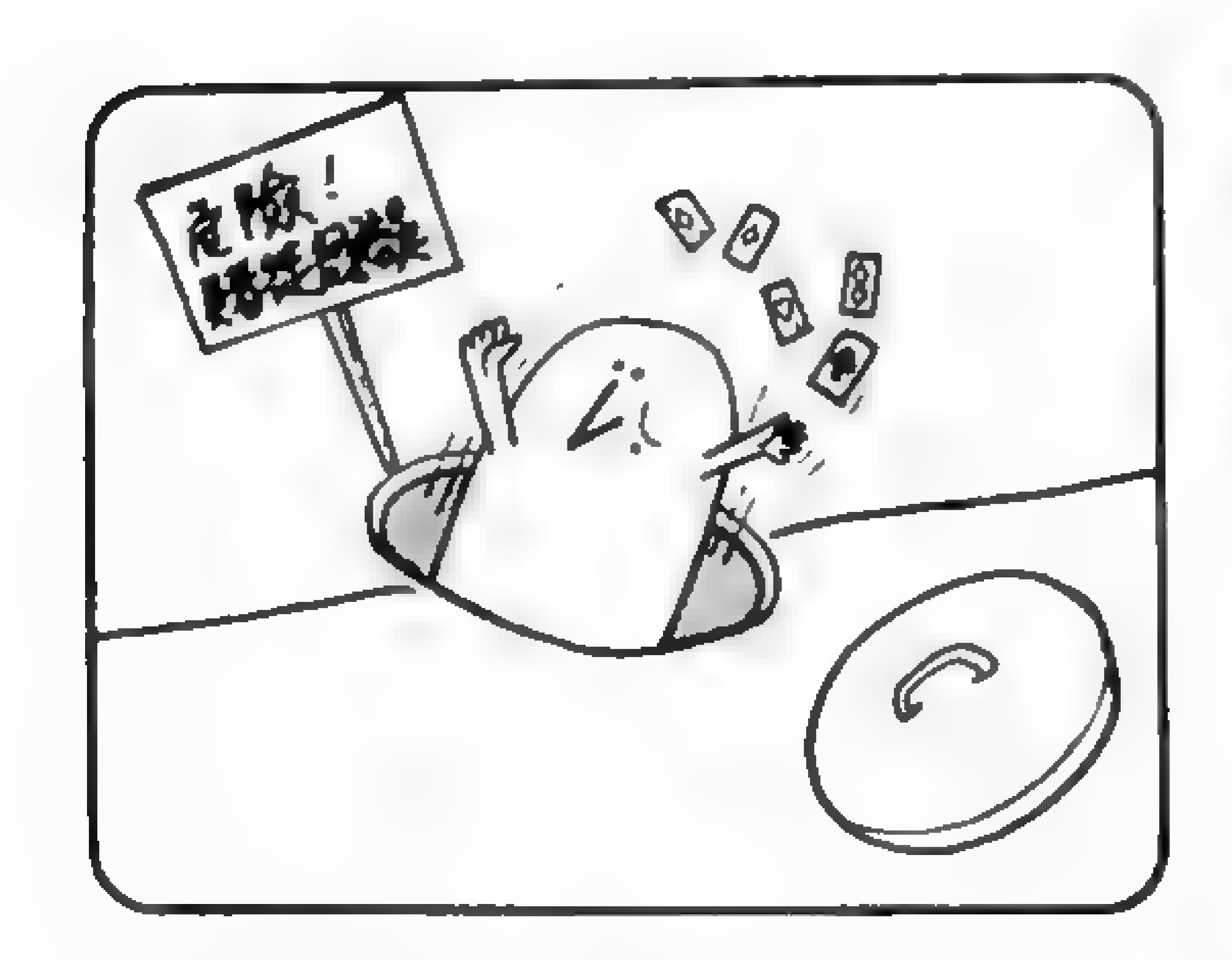


圖 4：如果對上面的問題，你的答案都是肯定的，那麼你已經掉入所謂的「賭徒謬論」的陷阱中。其實上述情形中，後來的事件與先前的事件是完全無關的。

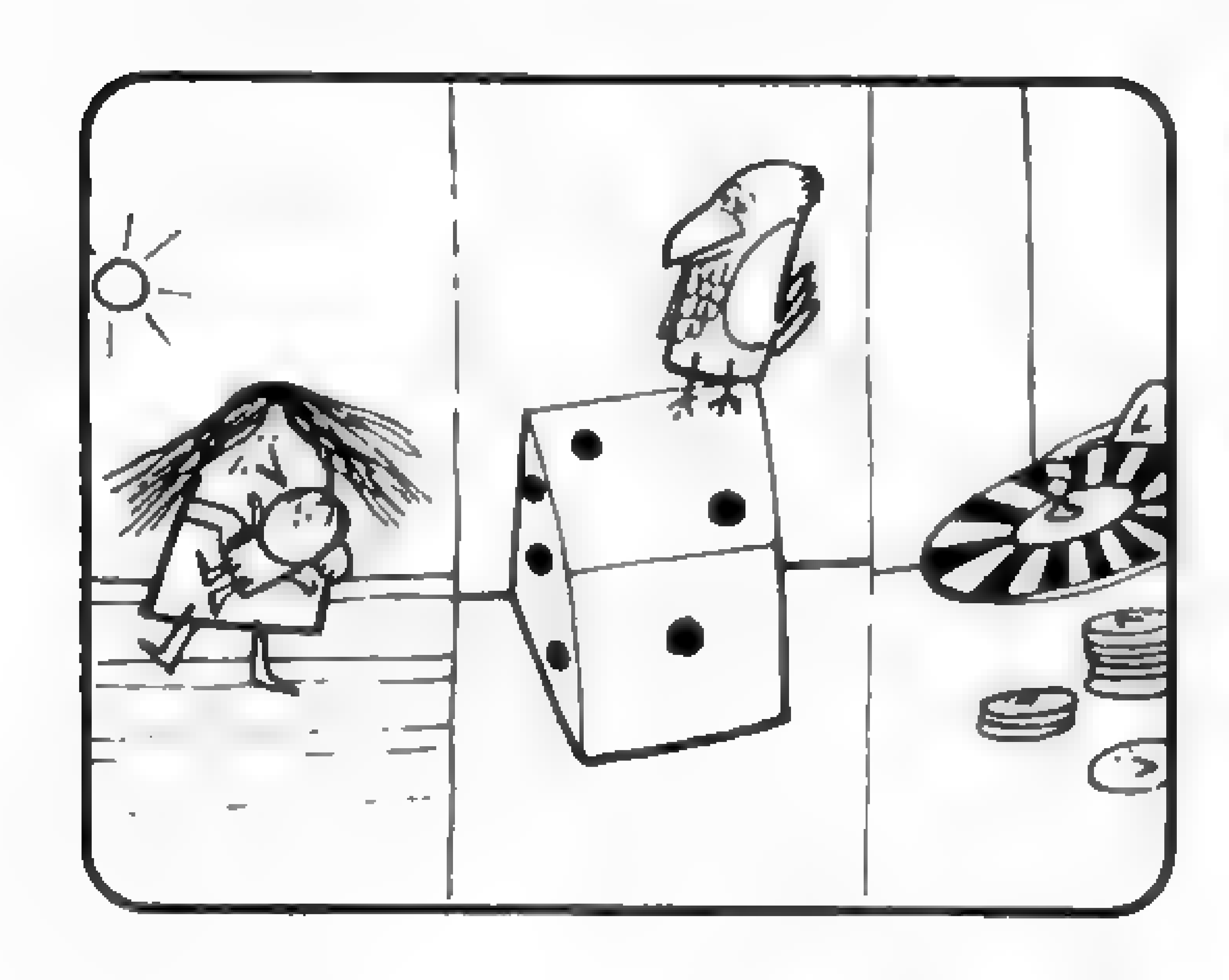


圖 5：鍾氏夫婦第六個孩子是女孩的機率，和前五個孩子是女孩的機率是一樣的。在輪盤中，下次出現紅色，和上次出現紅色的機率都相同。下一次擲出骰子是二的機率，仍是六分之一。



圖 6：說得更清楚些，假設鍾先生丟銅板，一連丟出五次都是人頭朝上，那麼下次他再丟到人頭的機會仍一樣：一半的機會。銅板並沒有記憶，不會記得它上次出現什麼。

如果甲事件的結果影響乙事件，那麼乙就是隨甲而「因變」(dependent)。舉個例子，你明天會不會穿雨衣的機率，很明顯的是看明天會不會下雨，或是(更直接的)看你預測的機率而定。所謂的「獨立事件」(independent events)，用平常的話來說，就是「與其他事件不相干」的事件。你明天穿不穿雨衣，和明天美國總統早餐時是否吃蛋，完全無關。

多數人很難相信獨立事件的機率不受類似獨立事件的影響。例如在第一次世界大戰時，在前線的士兵都喜歡躲在新的砲彈坑裏，他們認爲舊的砲彈坑比較危險，因爲後發的砲彈很快會落在老地方。由於兩個砲彈不大可能馬上接二連三的落在相同地點，於是得出結論：新的砲彈坑至少比較能保你一段時間的安全。

多年前有個故事，講的是一位常坐飛機旅行的男士，他害怕別的乘客不知何時會偷帶炸彈上飛機，所以他總是在公文箱內放個沒裝彈藥的炸彈，因爲他推想：在一班飛機上有個人帶炸彈就已經不太可能了，如果有兩位旅客同時攜帶炸彈上飛機，更是幾乎不可能發生的事。其實那位男士帶著炸彈，並不會影響別的旅客帶炸

彈的機率，就像丟一次銅板的結果，並不影響下次丟的結果。

所有受歡迎的輪盤制度，都是以「賭徒謬論」爲基礎—沒有認清獨立事件的獨立性。下注者賭在紅或黑上（或其他均分的賭注），每次輸了就再下更大的注，贏了就下較小的注。這種作法的假設是：如果輪盤裏的球讓你贏了，它似乎會「記得」，所以下次就不太可能再讓你贏；但如果球讓你輸了，它會覺得歉疚，下次輪盤再轉時，它比較可能會幫你。

事實上，每次轉動輪盤都與先前的轉動無關，這個事實證明了任何輪盤制度，都不會對下注者較有利。在史卡恩(John Scarne)的「全本賭徒指南」(Complete Guide to Gambling)中說道：「在所有組織性的賭博場所中，你賭贏的機會一定少於正確的比率，你等於付給賭場操作員幾成的費用，作爲下賭的權利金。你賭贏的機會是數學家所謂的『期望值爲負』(minus expectation)。當你用一種方式下一連串的賭注時，每一次都是負期望值，負數再加都不會變成正數……」

如果你有相信賭徒謬論的傾向，那麼用這類謬論導出的方法來模擬一場賭局，

試試看結果如何。例如，用撲克牌作籌碼來賭丟銅板，以一比一賭，只有在同一面出現三次後，才能換賭另一面。換句話說，出現三次人頭後，換賭背面；出現三次背面後，再賭人頭。到最後，譬如擲了五十次後，你手中的籌碼也許不會和開始賭時完全一樣多，不過應該所差無幾。銅板兩面出現的機率，不用說，是一樣的。

四隻小貓

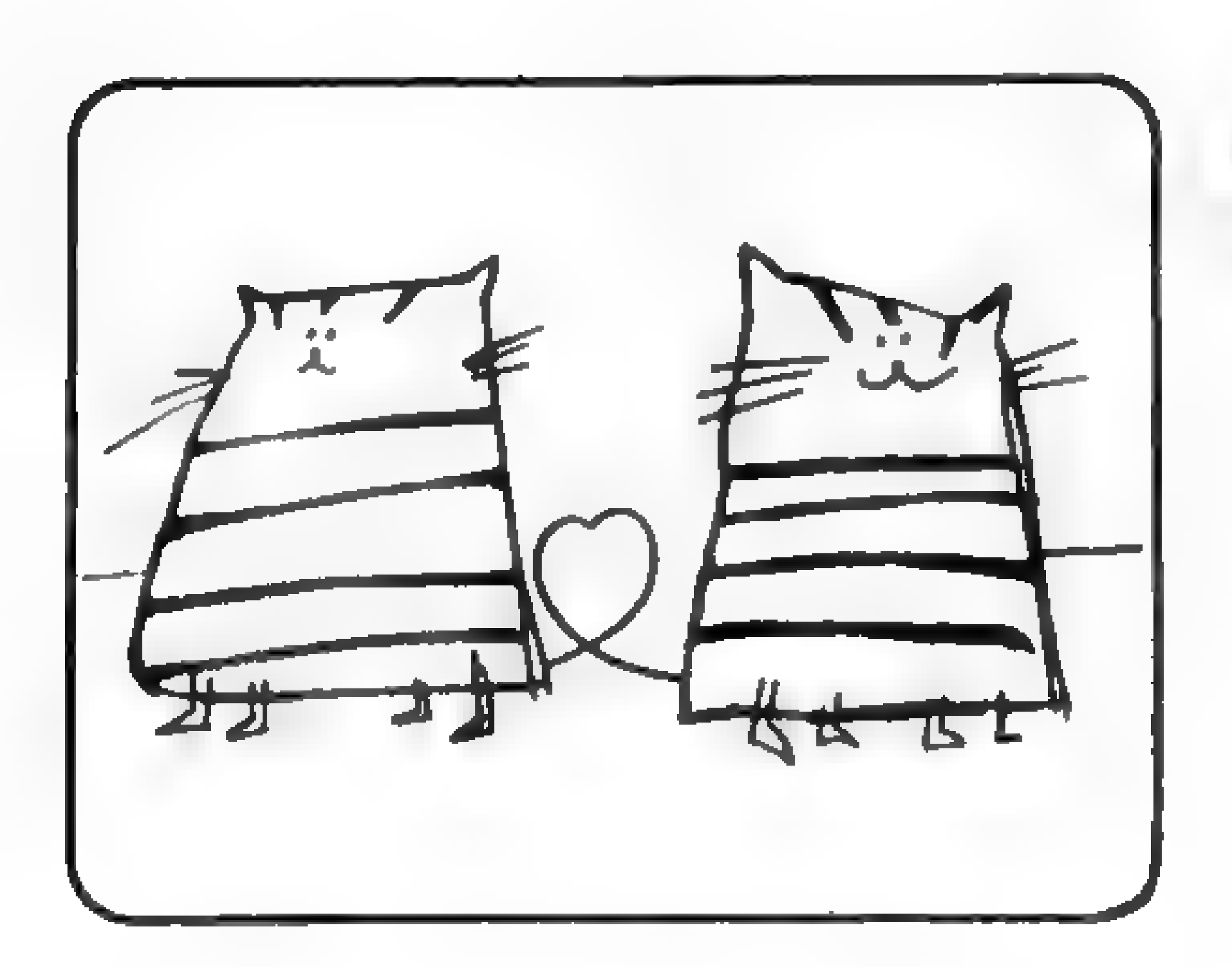


圖 1：算機率很容易出錯。這兒就有兩隻貓被搞得滿頭霧水。

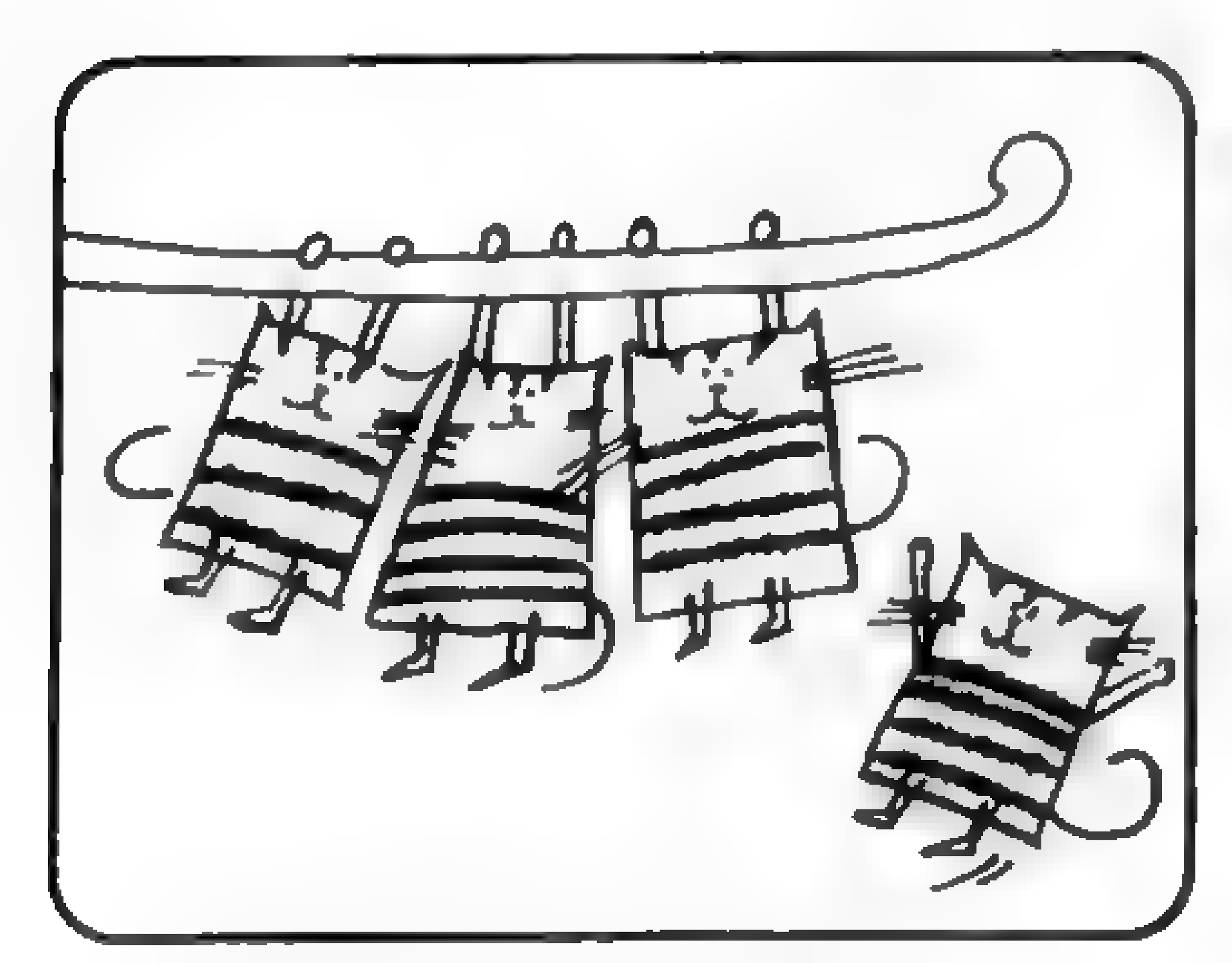


圖 2：貓先生：「太太，你新生的這胎有幾個孩子啊？」
貓太太：「你不會算哪？四個，大呆瓜。」
貓先生：「有幾個男孩？」
貓太太：「很難說，我還不曉得。」

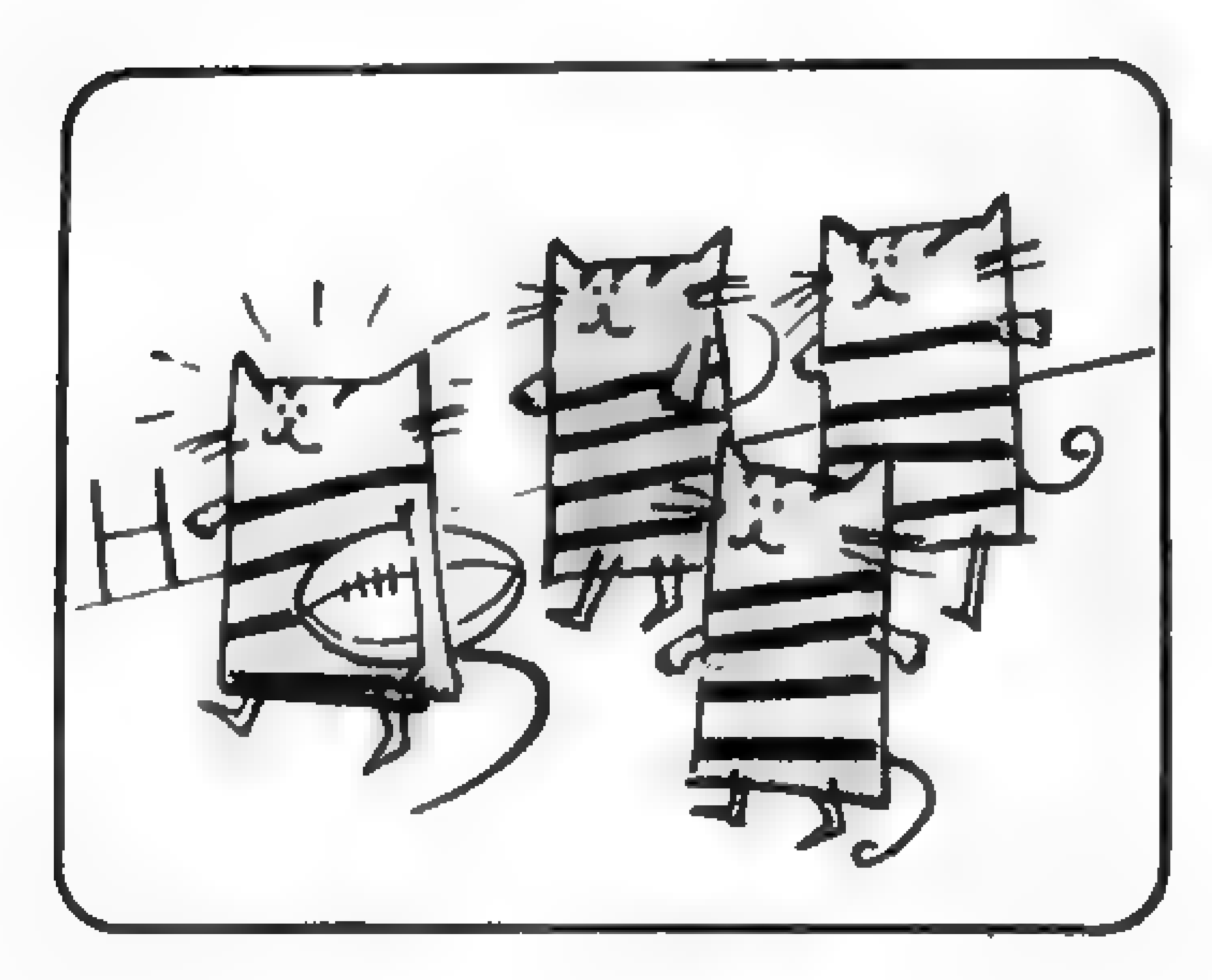
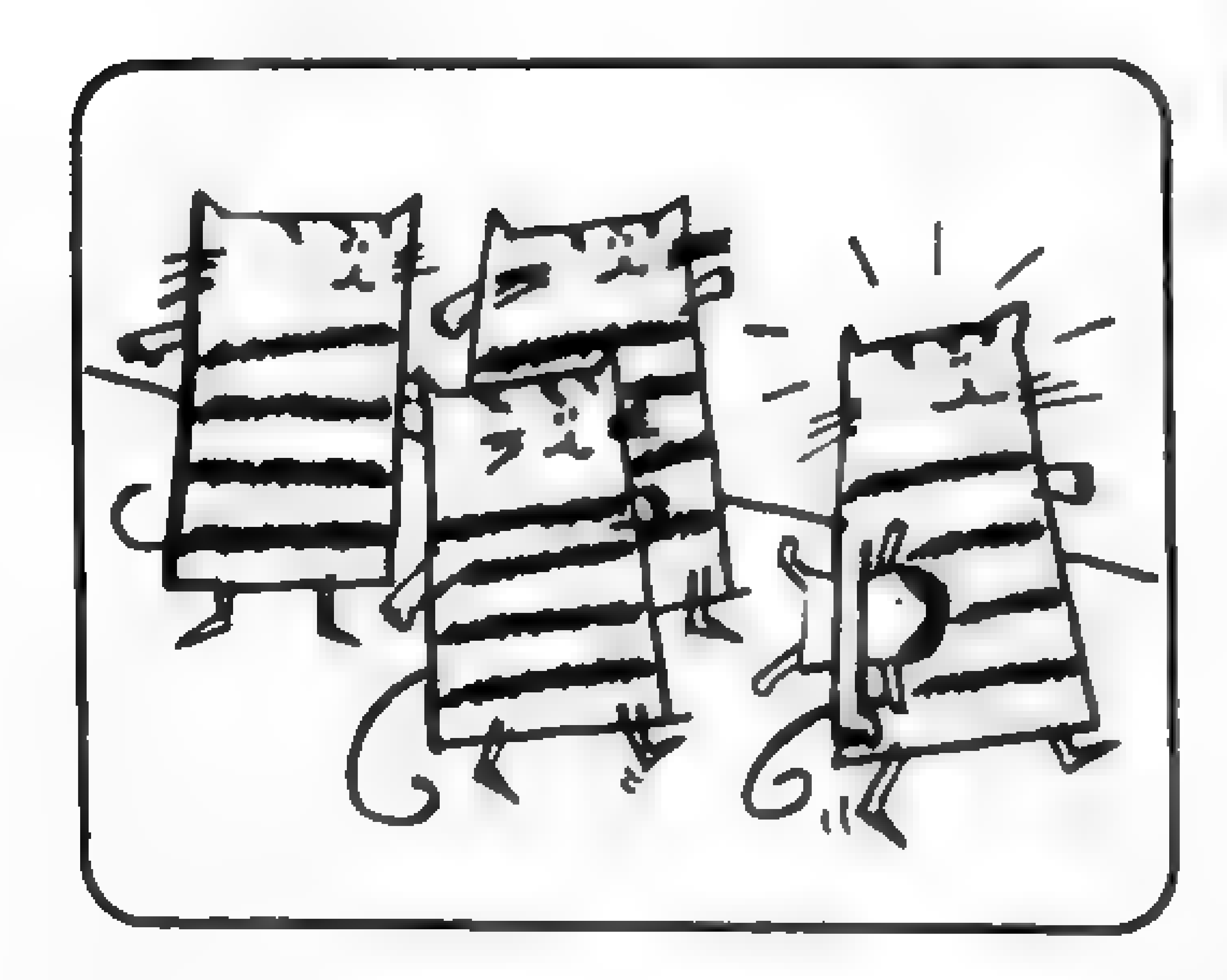


圖 3：貓先生：「不太可能四個都是男孩。」


圖 4：貓太太：「不過也不太可能都是女孩。」

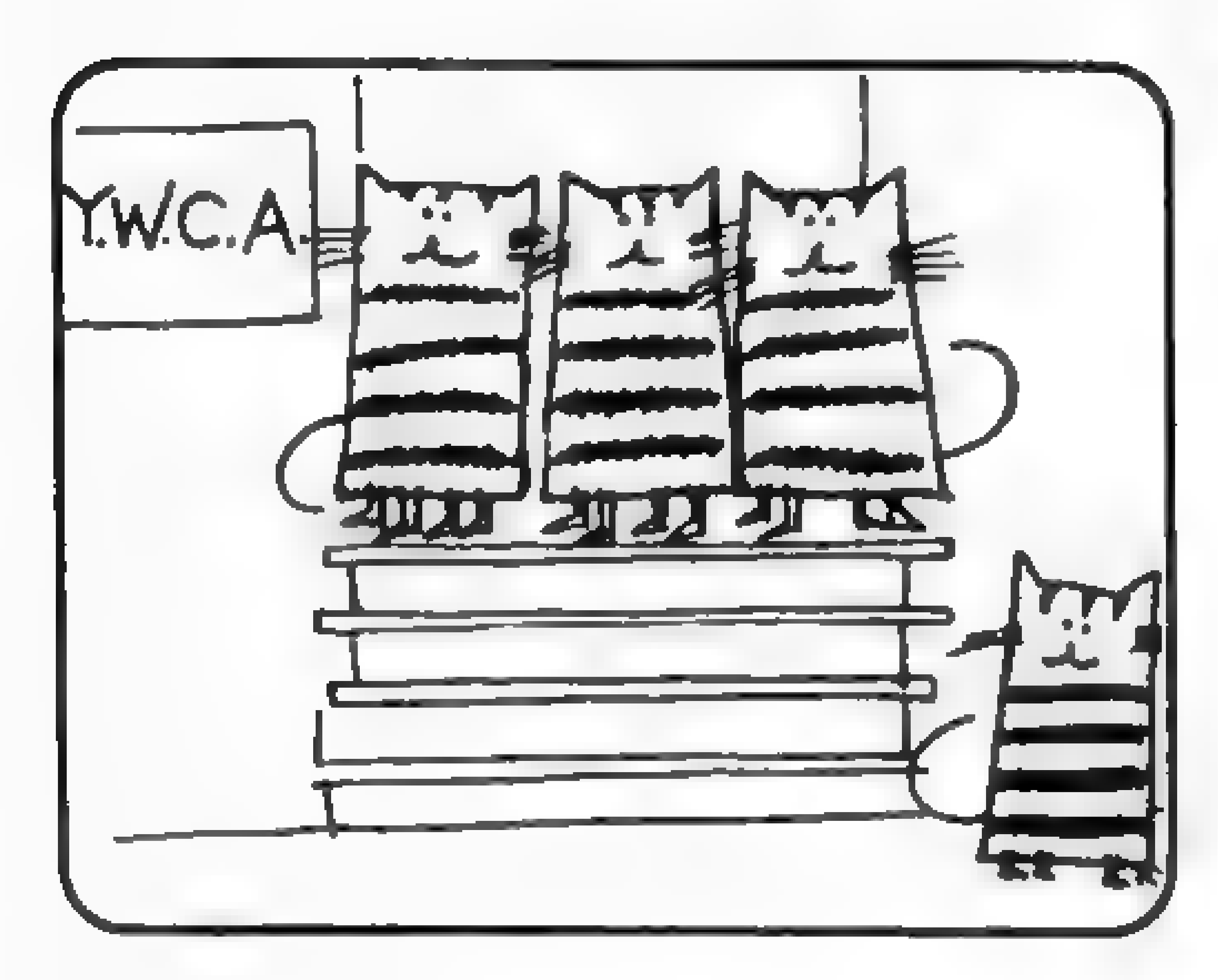


圖 5：貓先生：「可能只有一個男孩。」

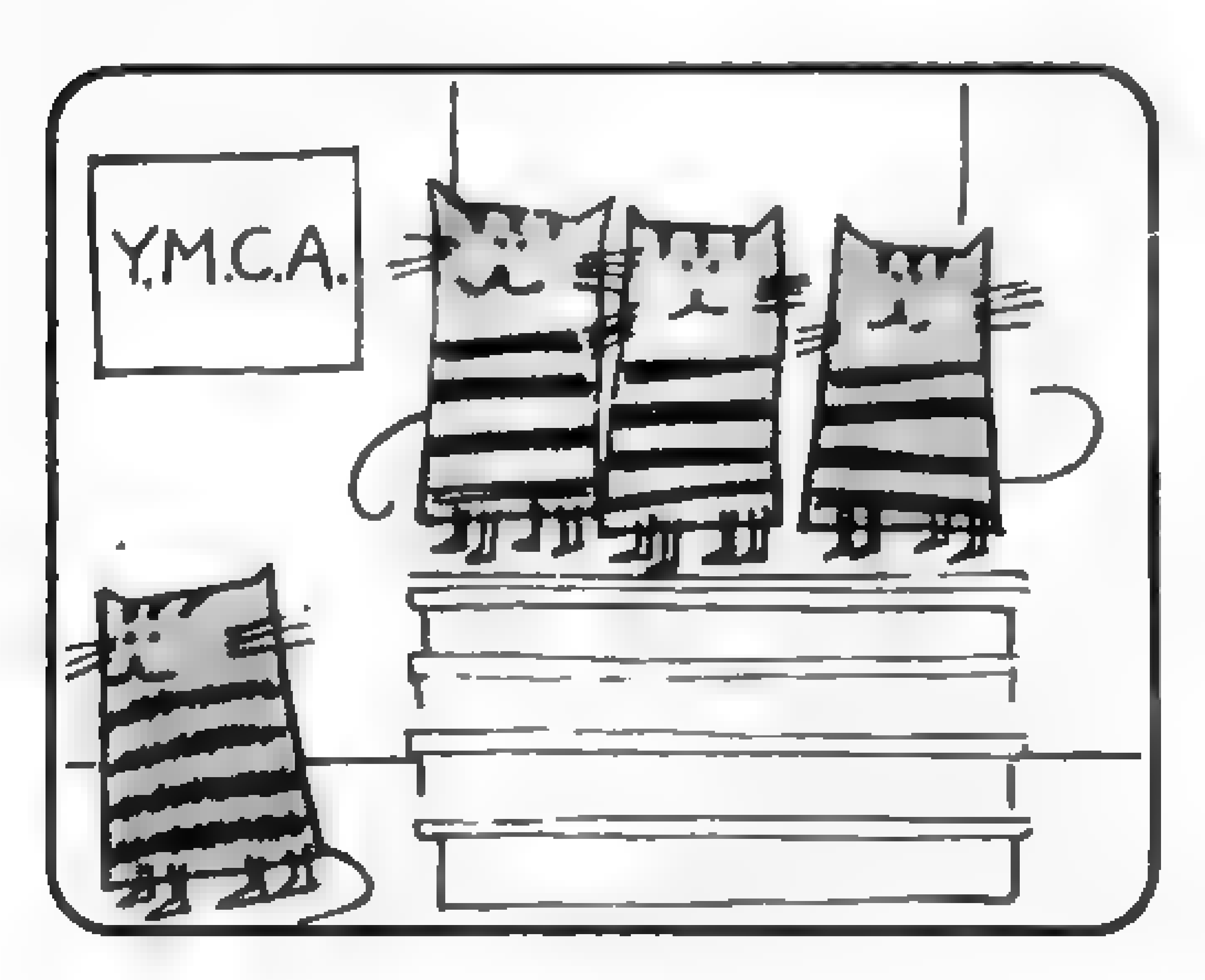
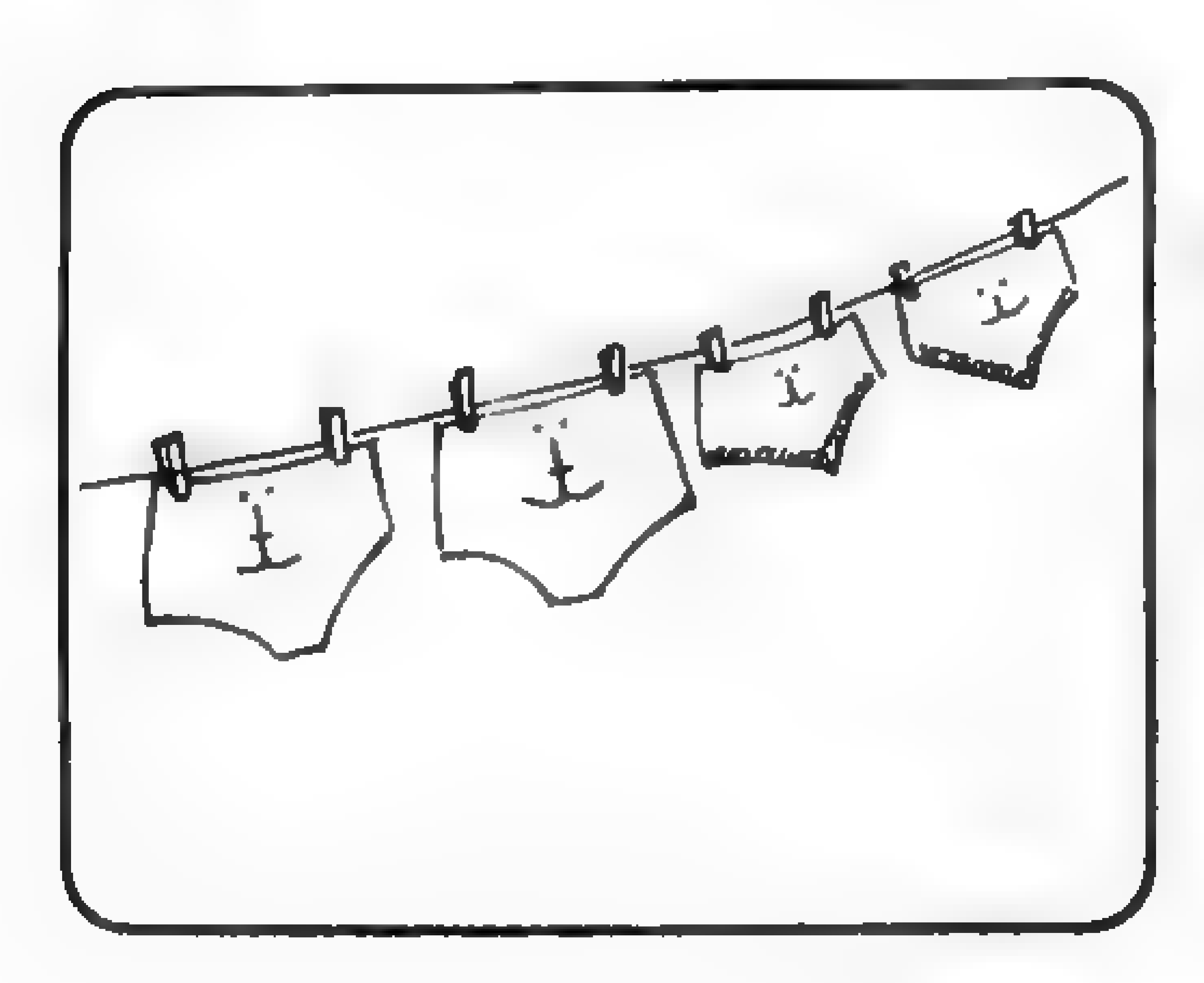


圖 6：貓太太：「或者只有一個女孩。」


圖 7：貓先生：「這不難算出來，是男是女的機會各有五十%。所以很明顯的，最可能的結果是兩男兩女。你幫他們取名字了沒有？」

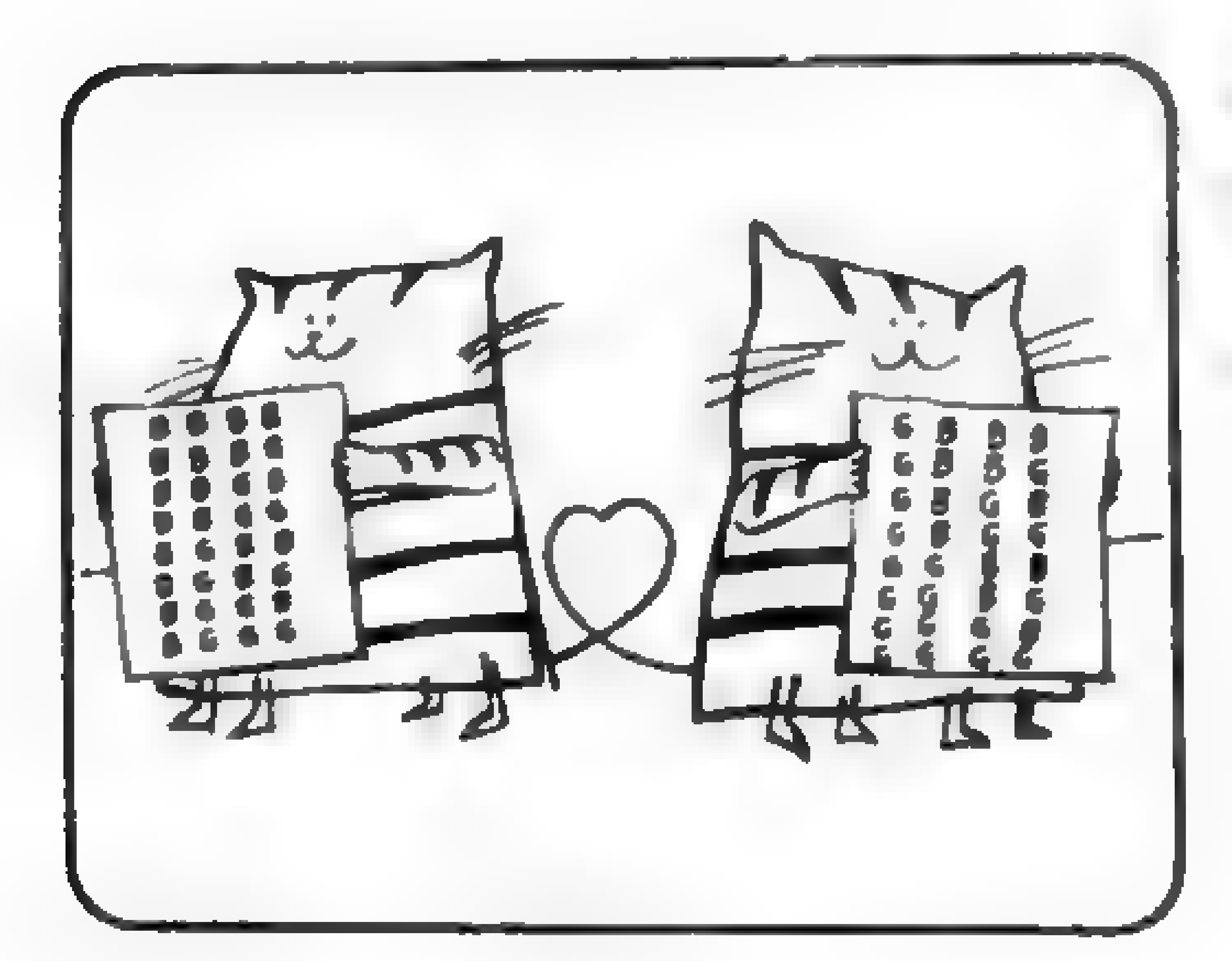


圖 8：貓先生的推理正確嗎？讓我們來查證他的說法，以「B」代表男孩，以「G」代表女孩，把所有可能的結果都列出來。

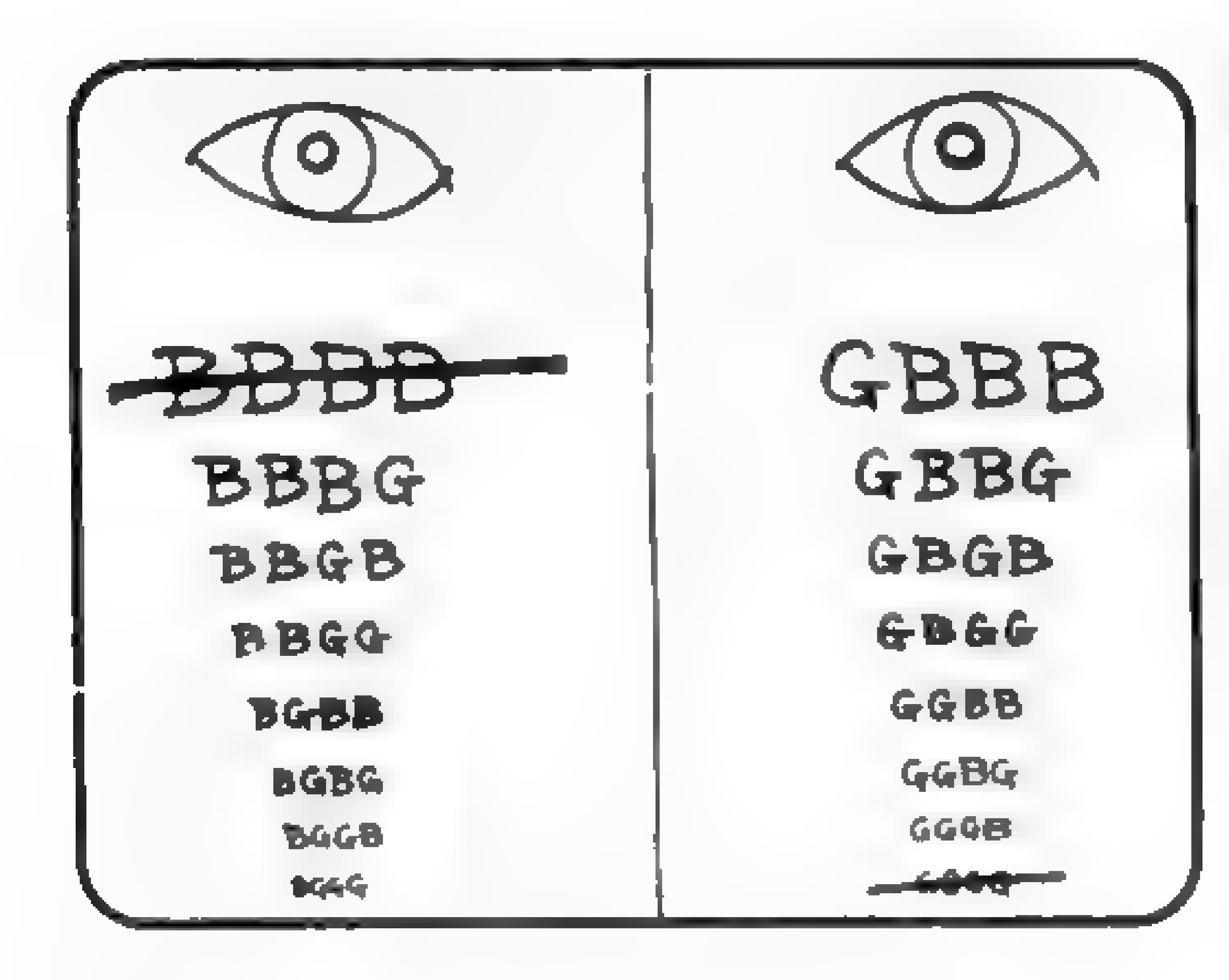


圖 9：十六種可能性中，只有兩種是四隻小貓都是相同性別，所以發生的機率是十六分之二，即八分之一。貓先生認爲這種情形的機率很小，是正確的想法。

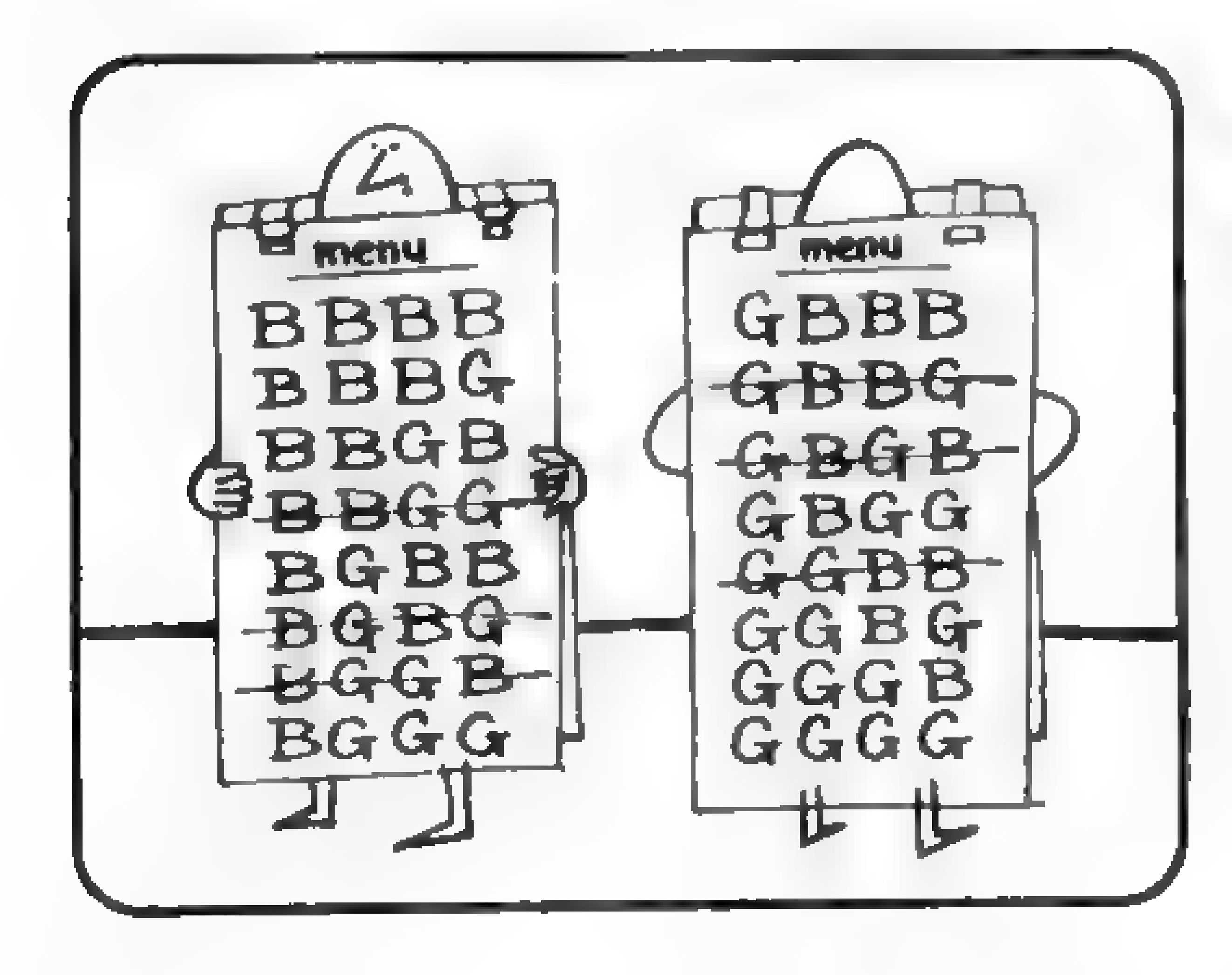


圖 10：現在再來看看貓先生認爲最可能兩男兩女的想法。這種情形佔六次，所以機率是十六分之六或八分之三，這絕對比八分之一高，貓先生好像說得沒錯。

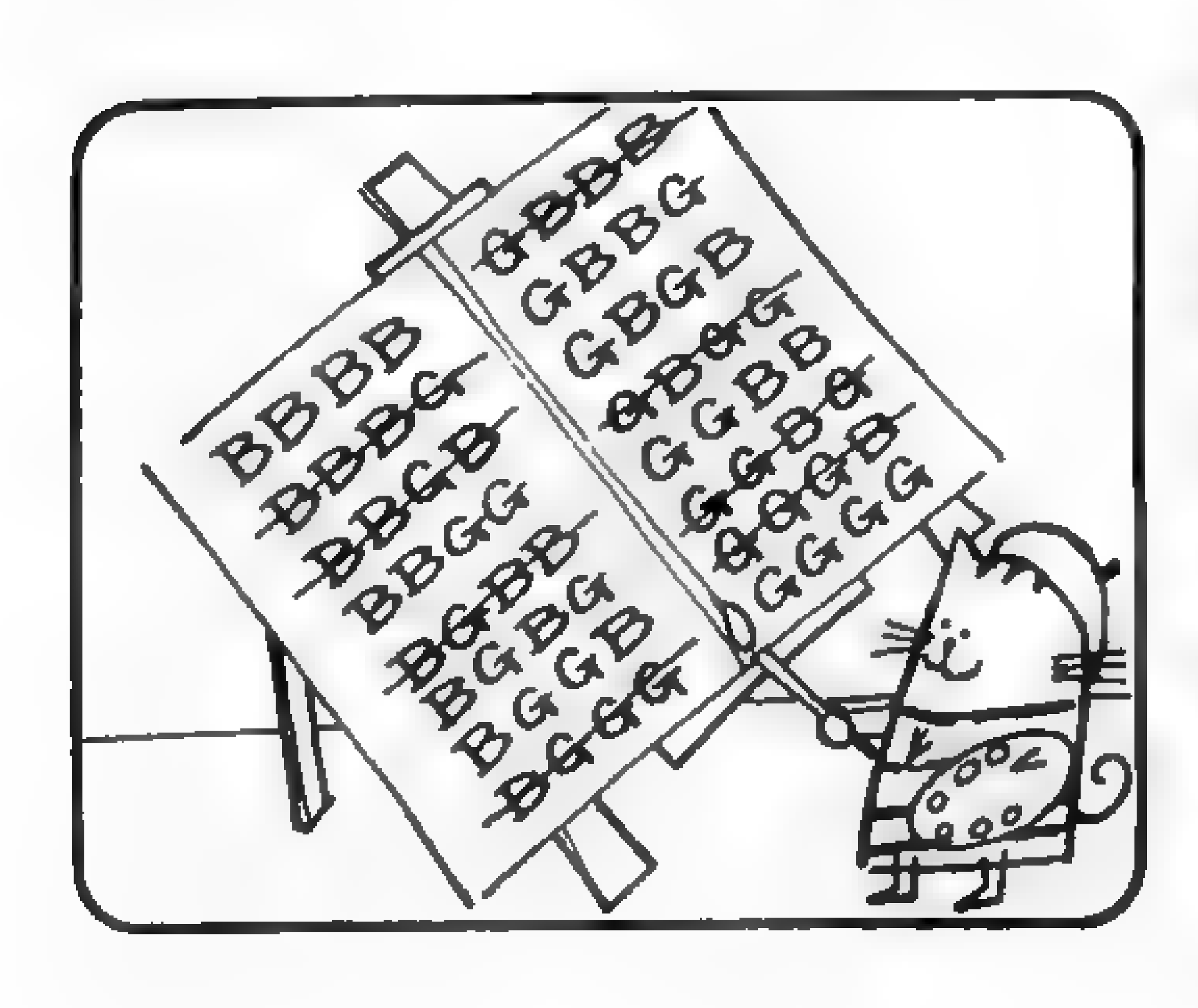


圖 11：我們還要考慮一種情形：三個性別相同一個不同的情形有八次，所以機率是十六分之八。這比兩男兩女的機率還高。如果我們算的沒錯，全部加起來應該等於一。他們加起來的確是一，因此可確信以上三種情形中有一種會發生。貓先生的猜測不對，最可能的情況不是兩男兩女，而是三男一女或三女一男。

很多人都會感到意外，四個孩子的家庭，最可能的組合居然不是二男二女，而是三男一女或三女一男。要測驗這個結果是不是眞的，很簡單，只要連續丟四個銅板，把每次結果記錄下來，丟了一百次以後，三比一的情形幾乎出現了五十次，而二比二的情形有三十三次。

你或許會對有五個和六個孩子的家庭，男女分配的機率如何感到好奇。只要列出所有的組合，就能找出答案，不過很花時間。在講機率的書上頭，可以找到較簡便的方法。

另一個類似問題的答案，也同樣和直覺相反，玩橋牌時四種花色最可能的分配情形如何？當然最不可能的是十三張都是一種花色（這種情形只有一千五百八十七億五千三百三十八萬九千八百九十九分之一的機率）。不過最可能的花色分配情形是如何呢？

即使橋牌老手通常也猜是四、三、三、三的分配，其實不對，最可能拿到手的花色分配應該是四、四、三、二，每發五次牌，你就可以拿到一手這樣的牌；可是

要九次或十次你才能拿到四、三、三、三花色分配的牌。即使是五、三、三、二花色分配的牌也只要發六次牌就能拿到。

經常在報紙上，可以看到有人拿到一手清一色牌的故事。這種情形會發生的機率微乎其微，幾乎令人懷疑這故事是揑造的，或是有老千在牌上動了手脚，或是剛開了一副新牌，恰好有人洗了次「雙份完美的牌」。所謂完美的洗牌是指把牌剛好切成兩半，再把兩邊的每張牌都互相交疊。而「雙份」完美的洗牌是指將四種花色完全分開，兩次完美的切牌洗牌後，發出四家的牌都各自是同一種花色。

三張牌的騙術

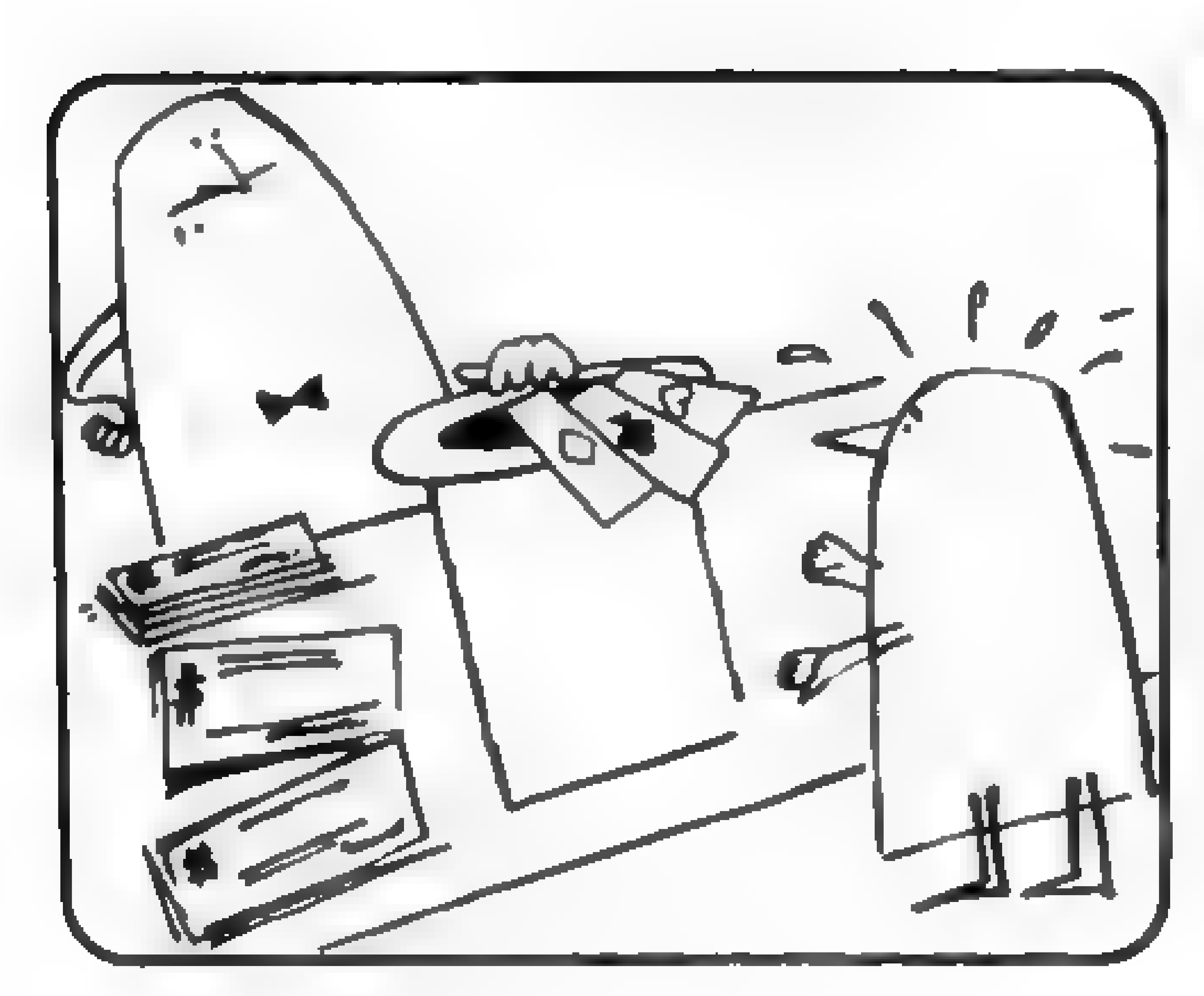


圖 1：在大部分的賭局中，如果你信任自己對機率的直覺，你可能會很慘。用三張牌和一頂帽子的小小賭局，就可以證明這個說法。

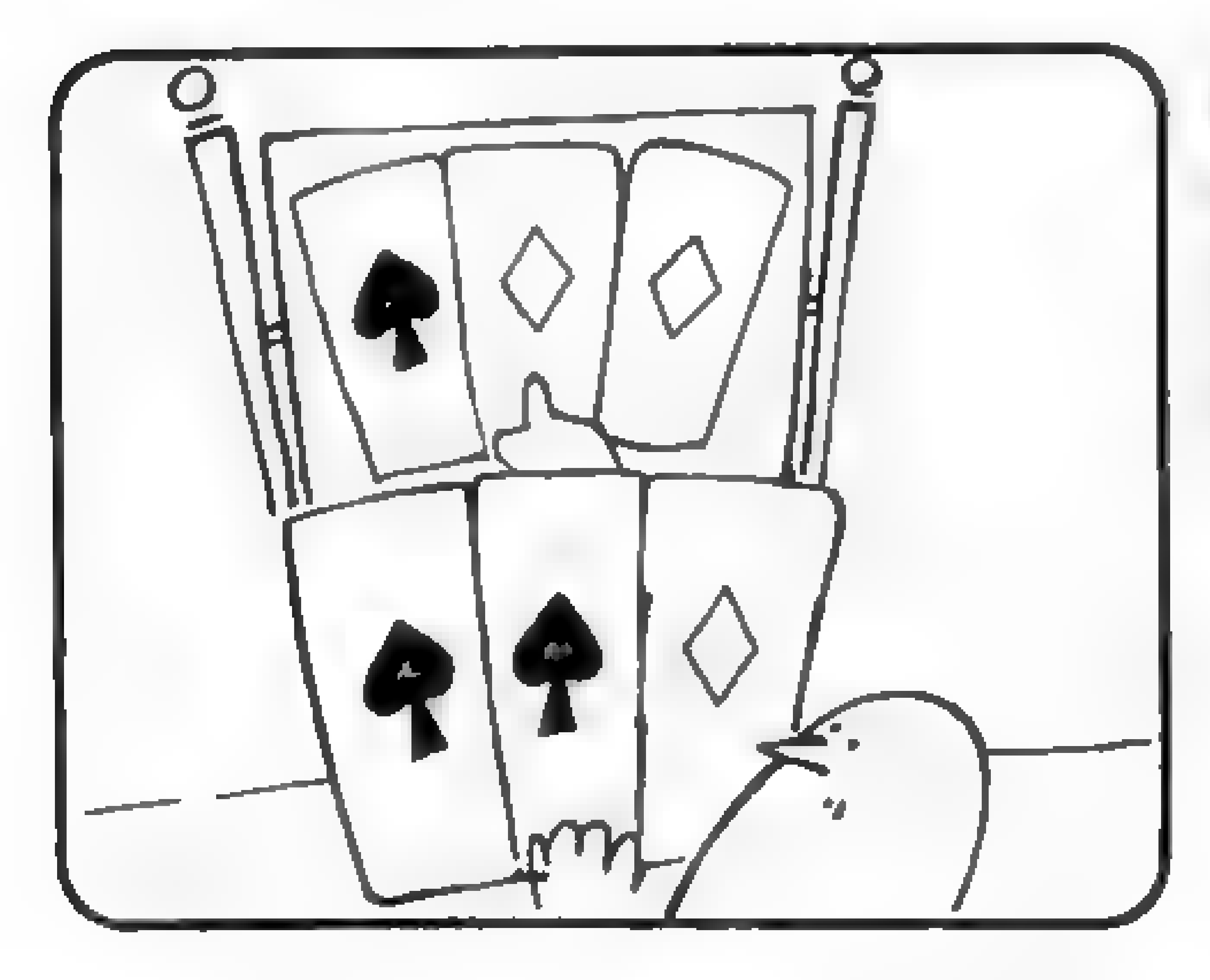


圖 2：從鏡子中的反射，很容易看出這些紙牌的結構。第一張牌的兩面都是黑桃，最後一張牌的兩面都是紅磚，中間那張則是一面紅磚，一面黑桃。

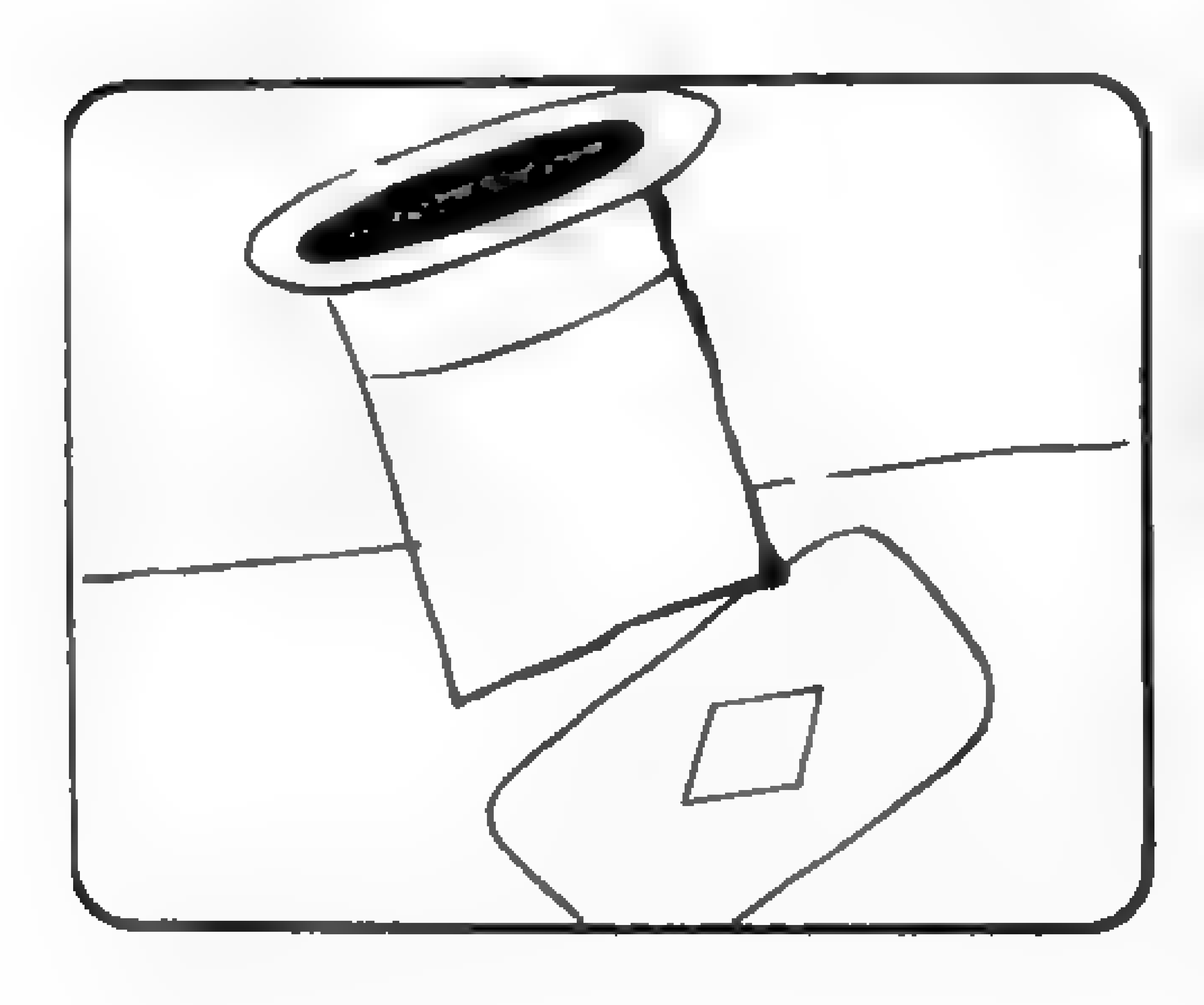


圖 3：莊家把牌放到帽中搖晃後，讓你選一張放到桌上，然後他以一比一的賭注，賭那張牌反面的花色和正面一樣。假如你選到的牌，正面是紅磚。

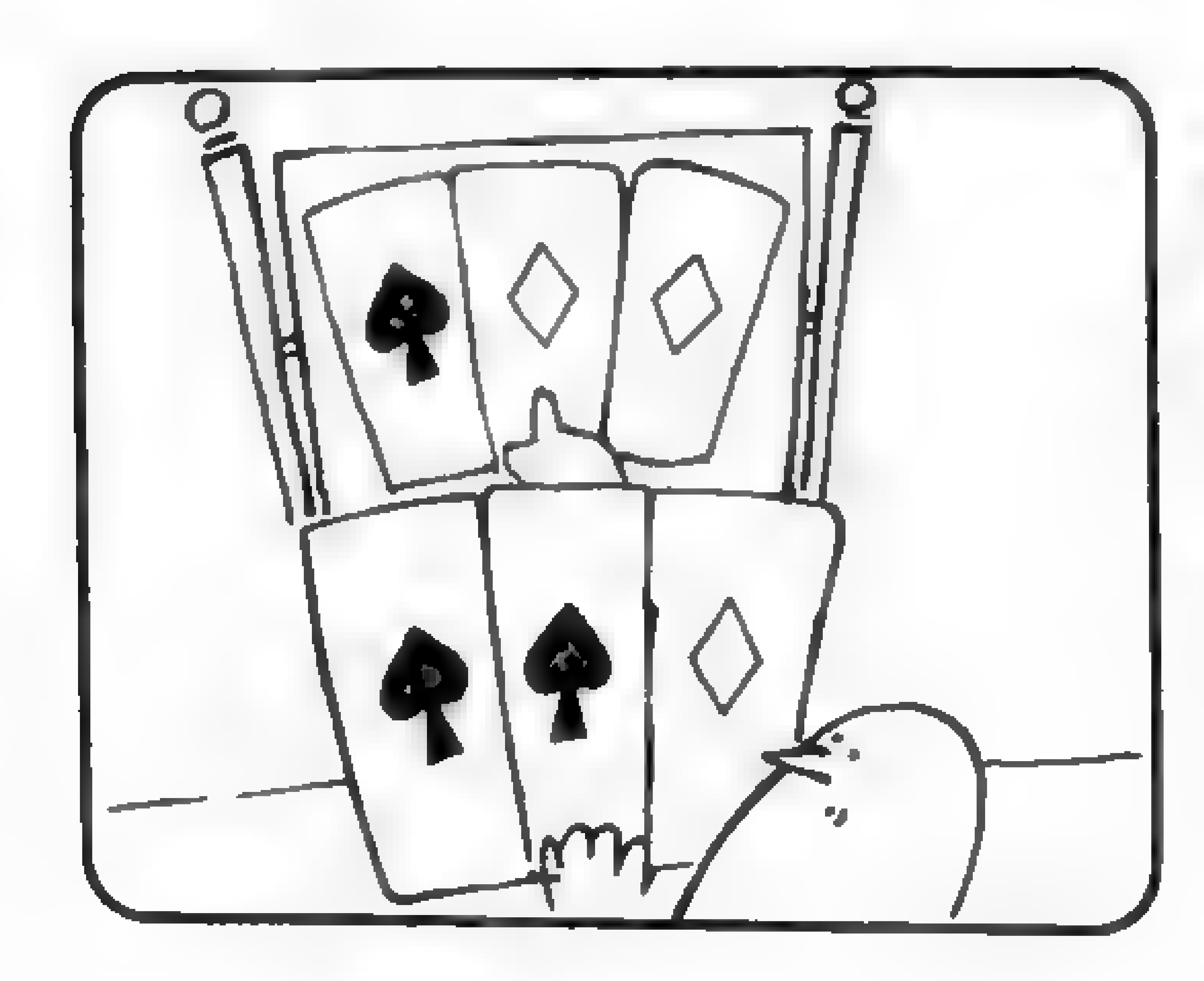


圖 4：爲了騙你誤以爲是個公平的賭局，莊家會告訴你，這張牌絕不可能是黑桃—黑桃；它不是黑桃—紅磚，就是紅磚—紅磚。所以你的牌，反面或是黑桃，或是紅磚，你贏的機會有一半。

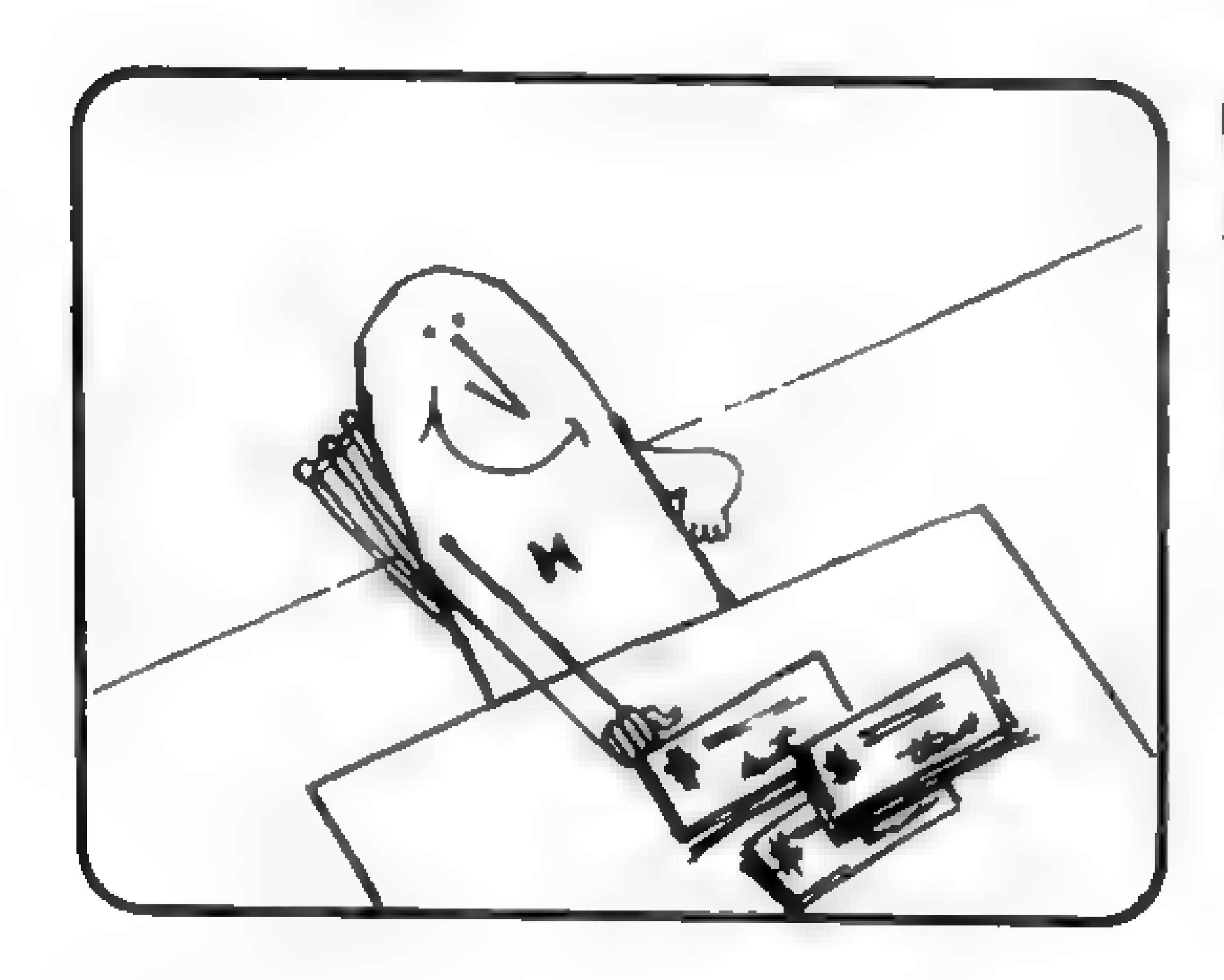


圖 5：如果這個賭局眞的公平，爲什麼莊家會那麼迅速的贏走你的錢？那是因爲他的說法是騙人的，眞正的輸贏機率是二比一，對他有利。

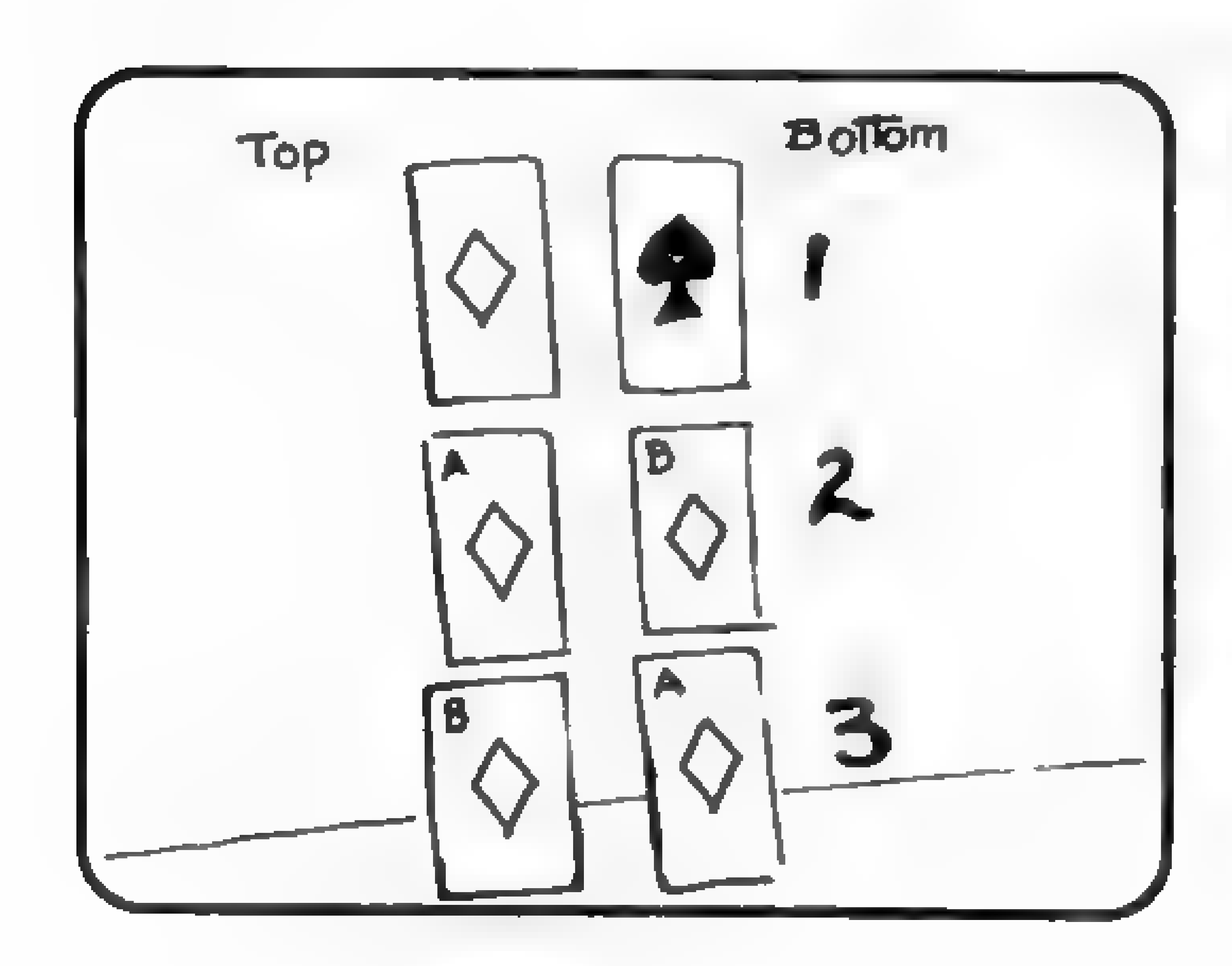


圖 6：蹊蹺在於出現兩面同花色的情形其實有三種而非兩種。如圖，翻出的牌可能是紅磚—黑桃；或是紅磚—紅磚，A 面朝上；或是紅磚—紅磚，B 面朝上。因此有兩種情形是兩面都同花色。所以賭三次，結果莊家能贏兩次。

這個紙牌遊戲是所謂「伯特蘭箱子矛盾」(Bertrand's box paradox)的另一種形式。伯特蘭是位法國數學家，在一八八九年一本關於機率的書中介紹這個矛盾。他想像有三個箱子，一個裝兩個金幣，一個裝兩個銀幣，另外一個裝金幣銀幣各一個。隨意挑選一個箱子，很顯然的有三分之二的機率，箱子中的硬幣是同樣質料。

假如我們從挑選出的箱子中，只拿出一枚硬幣來看，結果是金的，於是我們知道這不可能是有兩個銀幣的箱子，而是有兩枚金幣或一金一銀的箱子。由於這兩個箱子都一樣可能被選到，所以選到相同硬幣箱子的機率，看起來似乎是二分之一。如果選到的是銀幣，情形也一樣。

事實上怎麼可能因爲只看了箱子中的一枚硬幣，就改變了那個箱子中有相同硬幣的機率？很顯然不可能。

下面還有個相似的矛盾。如果你丟三個銅板，它們出現同一面的機率會是多少？三個中反正至少有兩個必定是一樣的，第三個不是和另外兩個相同，就是自成「一面」。由於第三個銅板出現任一面的機率各是一半，所以看起來好像三個銅板都是同

一面的機率有二分之一。

只要列出各銅板正反面可能出現的八種情形，就能看出這個推理的錯誤，八種情形是：

正正正　正正反　正反正　正反反

反正正　反正反　反反正　反反反

三個銅板都是同一面的情形有兩種，所以正確的機率是八分之二等於四分之一。

另外有個令人困惑的小矛盾，也是源自於沒有看清所有的可能性。這個矛盾是：有個男孩有一顆彈珠，有個女孩有兩顆彈珠，他們比賽打彈珠，誰的彈珠打到最靠近地樁誰就贏。假設男孩女孩的技術相當，測量的方法又夠精確，所以不會有和局，那麼女孩獲勝的機率是多少？

說法一：女孩有兩顆彈珠可打，而男孩只有一顆，因此女孩獲勝的機率是三分之二。

說法二：女孩有彈珠A和B，男孩有彈珠C，產生的結果有四種：

1. A和B都比C靠近地樁。
2. 只有A比C更靠近地樁。
3. 只有B比C更靠近地樁。
4. C比A和B都靠近地樁。

在這四種情況中，有三種結果都是女孩贏，所以她獲勝的機率是四分之三。

那一種說法才是正確的？爲了解決這個問題，我們把所有的可能情形列出來，一共有六種而非四種，依靠近地樁的順序列出：

ABC　ACB　BAC

BCA　CAB　CBA

在這六種情況中，有四種都是女孩贏，所以證實說法一是正確的，她贏的機率是六分之四，即三分之二。

意亂情迷

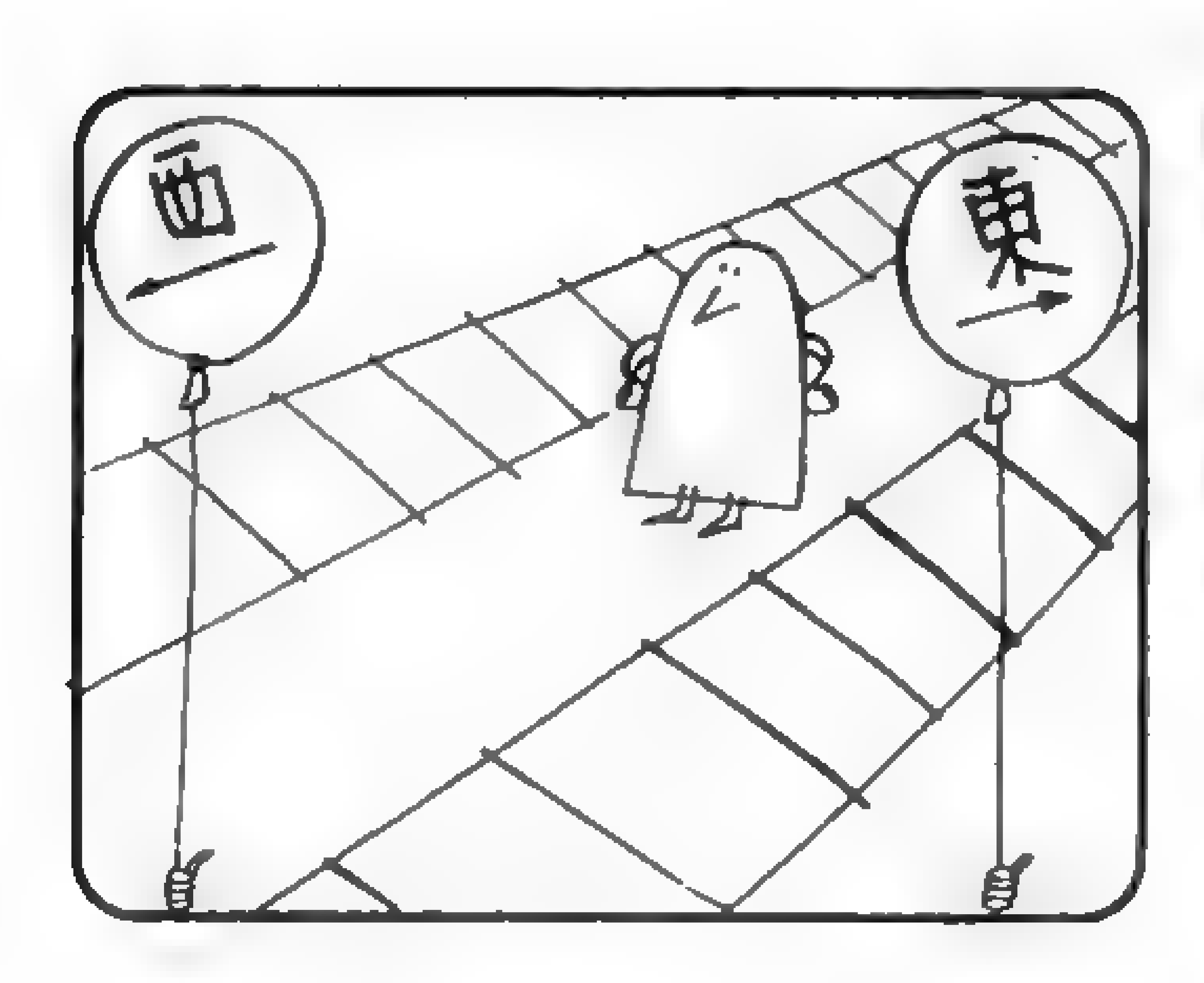


圖 1：有個男孩總是難以抉擇該去拜訪哪個女友，你聽說過這個故事嗎？一個女友住在東，一個住在西。男孩每天到達車站的時間不一定，隨機搭上先來的班車。

時刻表

東向	西向
12:00	12:01
12:10	12:11
12:20	12:21

圖 2：東向和西向的火車都是每隔十分鐘開一班。

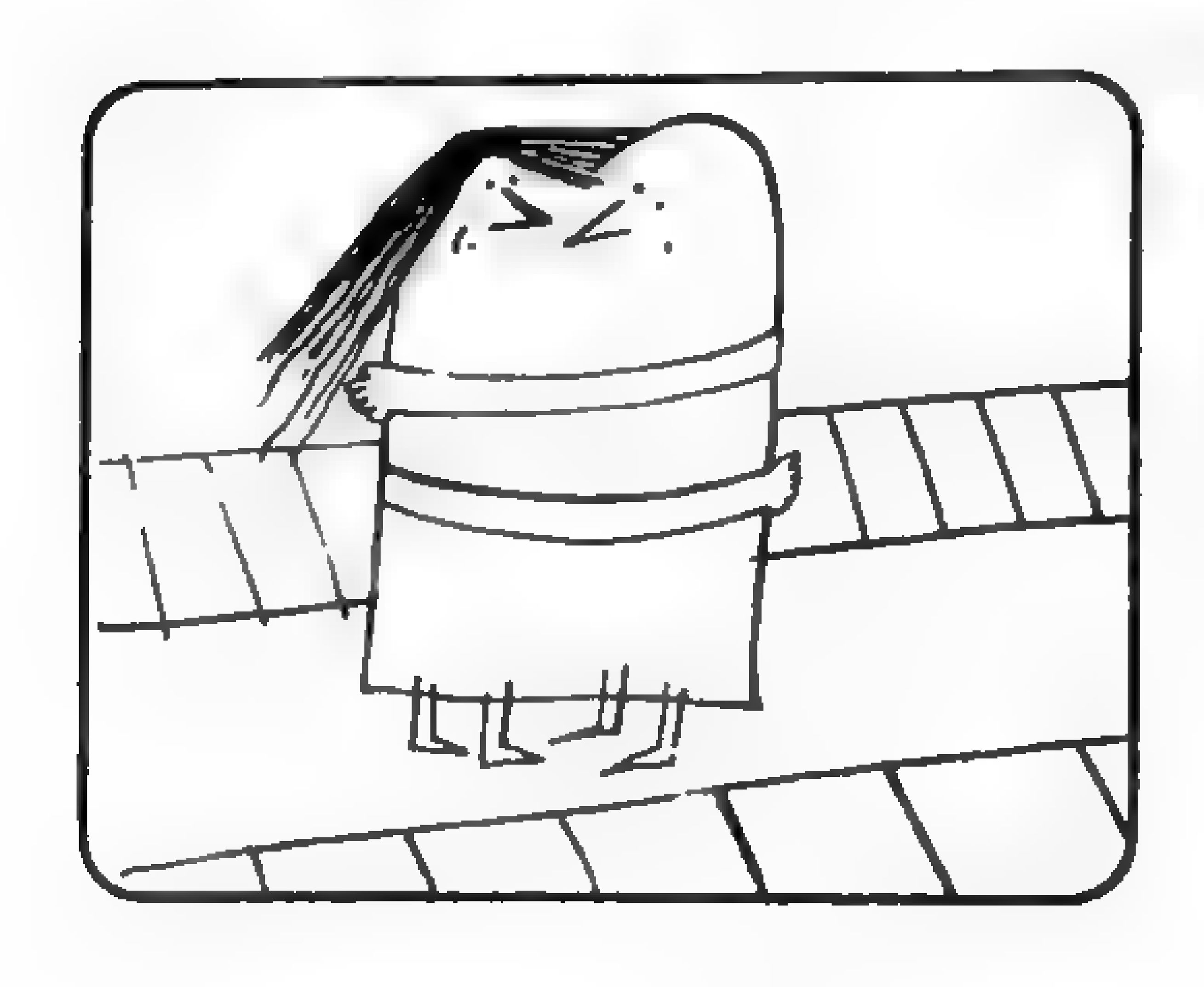


圖 3：有天晚上，住在東邊的女友東施對男孩說：「我真高興，平均每十天中，你能來看我九次。」

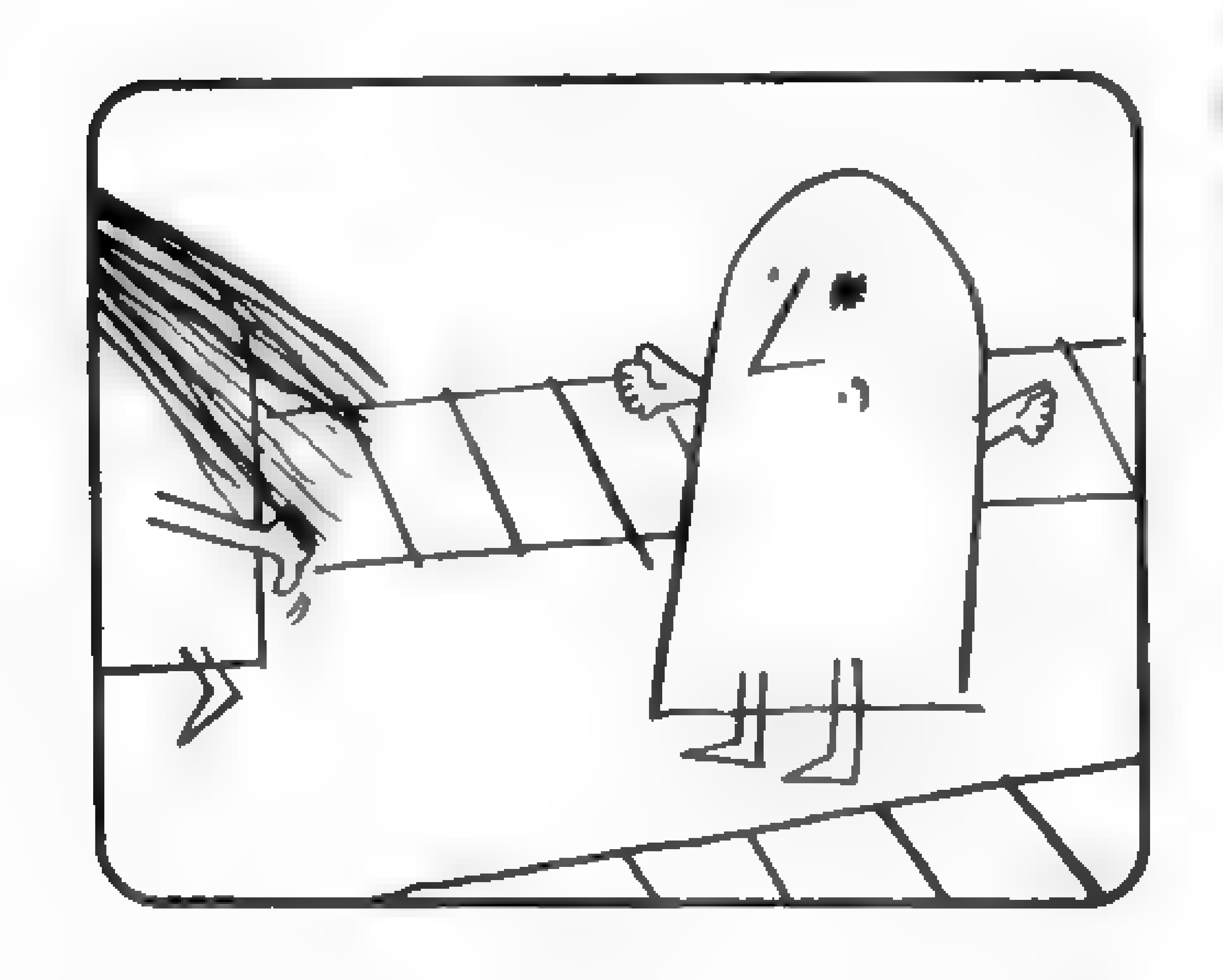


圖 4：而住在西邊的女友西施則非常生氣，她說：「爲什麼十天中，我只能看到你一次？」

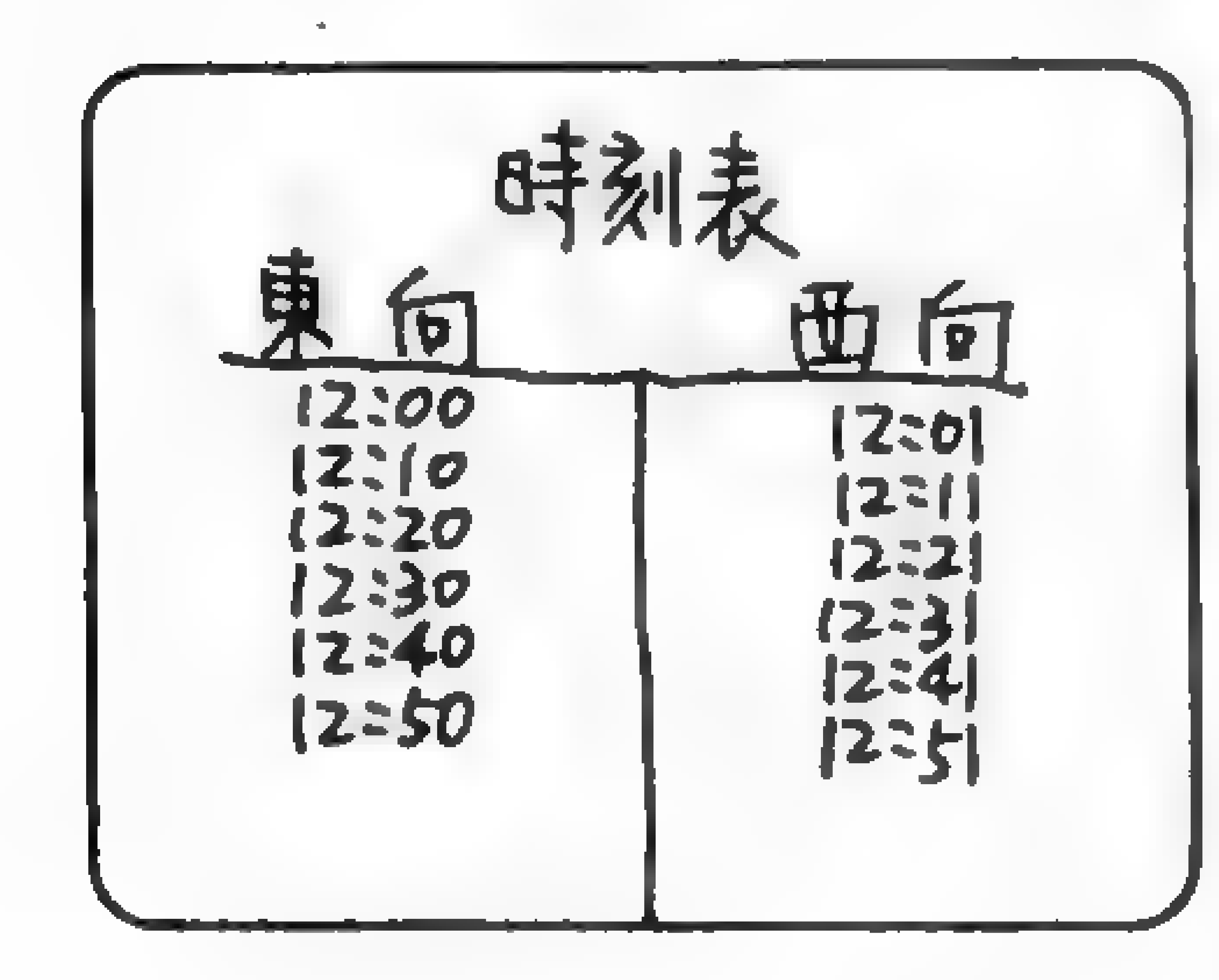


圖 5：這個怪現象的原因是，雖然所有的車班都是相隔十分鐘，可是從時刻表中我們可知，西向火車的抵達時間和開車時間，總是比東向火車晚一分鐘。

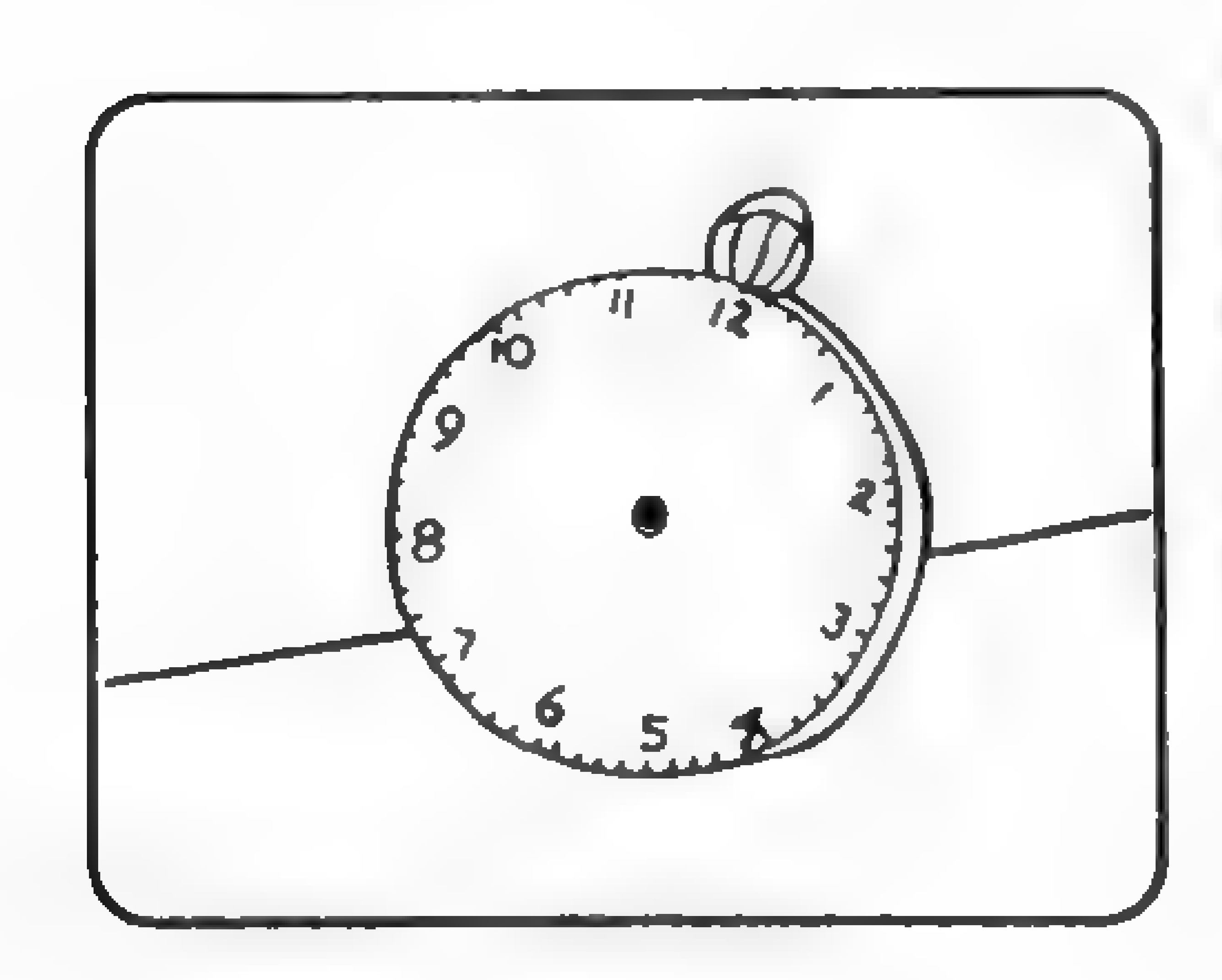


圖 6：要搭上西向的火車，那個男孩必須在圖中陰影部分的一分鐘中內到達車站；要搭上東向的火車，則只需在圖中白色部分的九分鐘內抵達車站即可。因此，搭上西向火車的機率是十分之一，而搭上東向火車的機率是十分之九。

在這個矛盾中，依照時刻表，等火車的時間是固定的。在一連串的隨機事件中，把n次的等待時間加起來，除以n次，可得到「平均等候時間」(average waiting time)。例如，那個男孩等到東向火車的平均等候時間是四又二分之一分鐘；等到西向火車的平均時間是半分鐘。

很多矛盾都牽涉到「等候時間」。下面是個有趣的例子。擲銅板時，擲到人頭（或背面）的平均等候時間是擲兩次。這表示如果你連續擲很多次銅板，擲到兩次人頭的間隔時間（第一個人頭不算，到第二個人頭出現），是擲兩次。

假設你把擲了許多次銅板的結果（垂直）依序列出，在表上隨機找一點（也許閉上眼睛，隨便畫條橫線），找出線上面以及線下面各第一次出現的人頭，然後數數看兩者間要擲幾次銅板。如果你重覆做很多次，出現兩次人頭的平均間隔是擲幾次銅板。

直覺的答案是兩次，可是實際上是三次，原因和爲什麼男孩總是搭上東向火車的理由一樣。擲到人頭的間隔有長有短。你隨機畫條線，當然畫到間隔長的機率會

比畫到間隔短的機率高，就和男孩不定時到達車站一樣—老碰到東向的火車。

接下來我們來簡單證明爲什麼正確答案是三次。銅板沒有記憶，不會記得過去的行爲，所以你每畫條線，線下面出現人頭的平均等候時間一定是兩次。同樣的，如果我們把過程「倒轉」(time reverse)，往回算線以上出現人頭的平均等候時間，也同樣是兩次。因此，兩次人頭間的等候時間就是四次，由於我們把「間隔」(run)定義爲從第一次出現人頭到出現第二次人頭之前，因此四次要扣掉一次，所以是三次。

像賭輪盤也是雷同的問題，甚至更令人詫異。一個輪盤上有三十八個號碼，因此出現同一號碼，譬如說「7」的平均等候時間是三十八轉。可是如果你連續轉動輪盤—把結果列成一長條的表，從表上隨機選一點，那麼點以上和以下最近兩個「7」的間隔，不是三十八次，而是七十五次。

$$(2\times 38)-1=75$$

試試手氣



圖1：下次你到賭場時，離「試手氣」(chuck-a-luck，譯註：是種投擲三顆骰子的賭局。) 遠一點。很多人都上當去玩它，因爲他們以爲不可能會輸的。

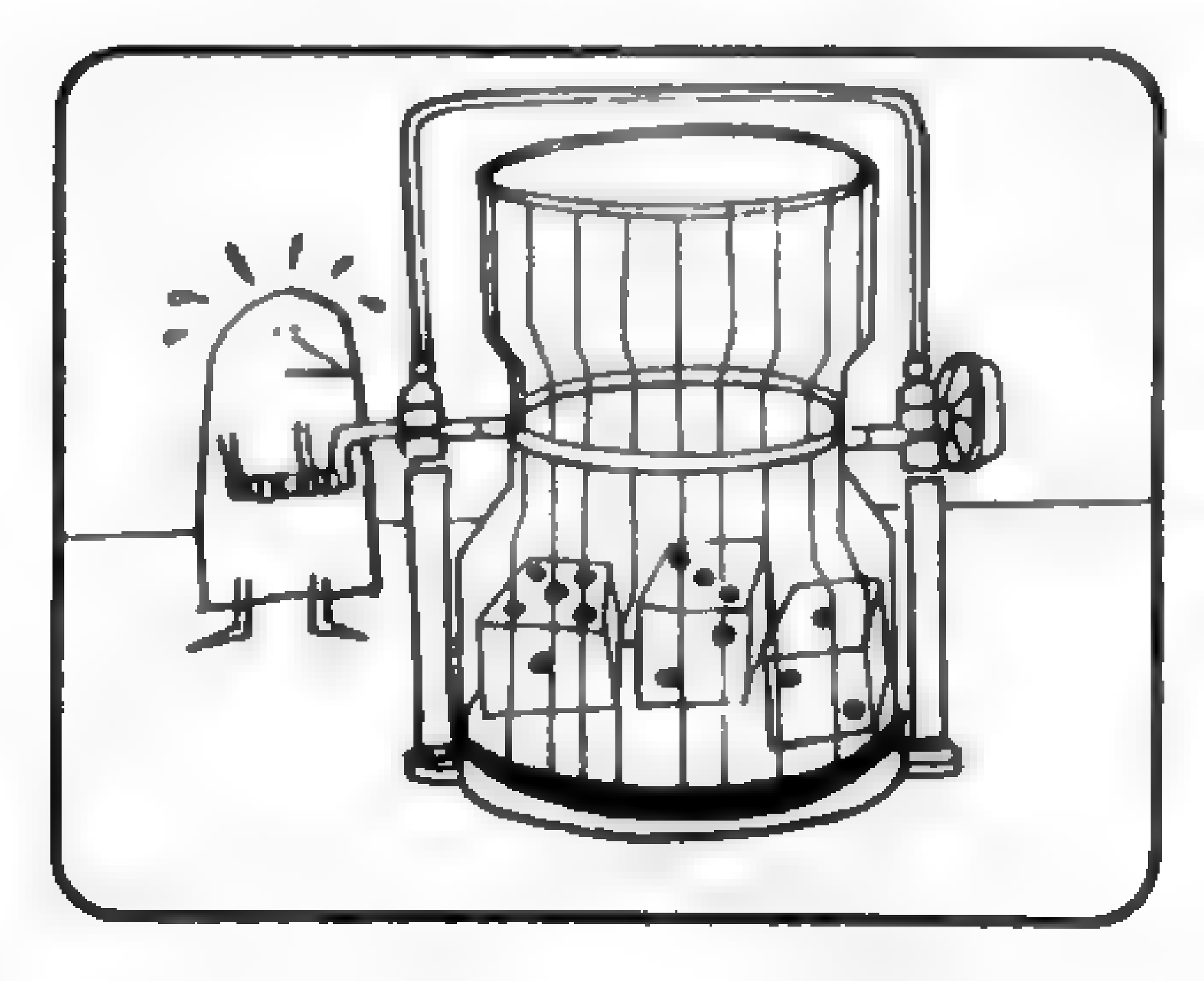


圖2：「試手氣」的玩法，是在籠內放三顆骰子，然後轉動籠子，玩的人從一到六賭一個號碼，任何一個骰子出現他的號碼，他就贏錢。玩的人常常是如圖3這樣推理。

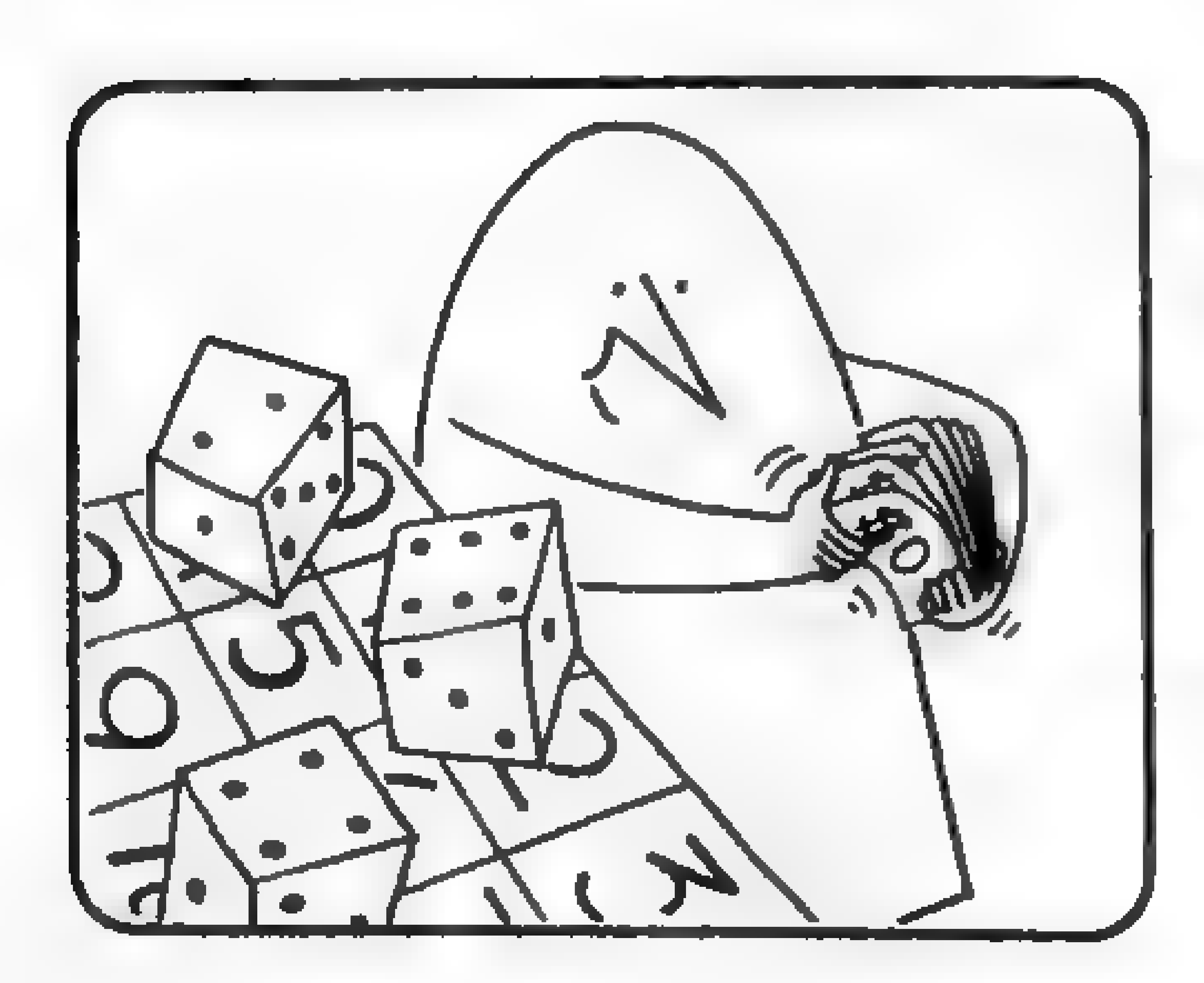


圖3：馬先生想：「如果這個遊戲只有一個骰子，我的號碼就會在擲六次骰子中出現一次；如果有兩個骰子，就會在六次中出現兩次。現在有三個骰子，六次中會出現三次，所以贏的機會是一半，很公平。」

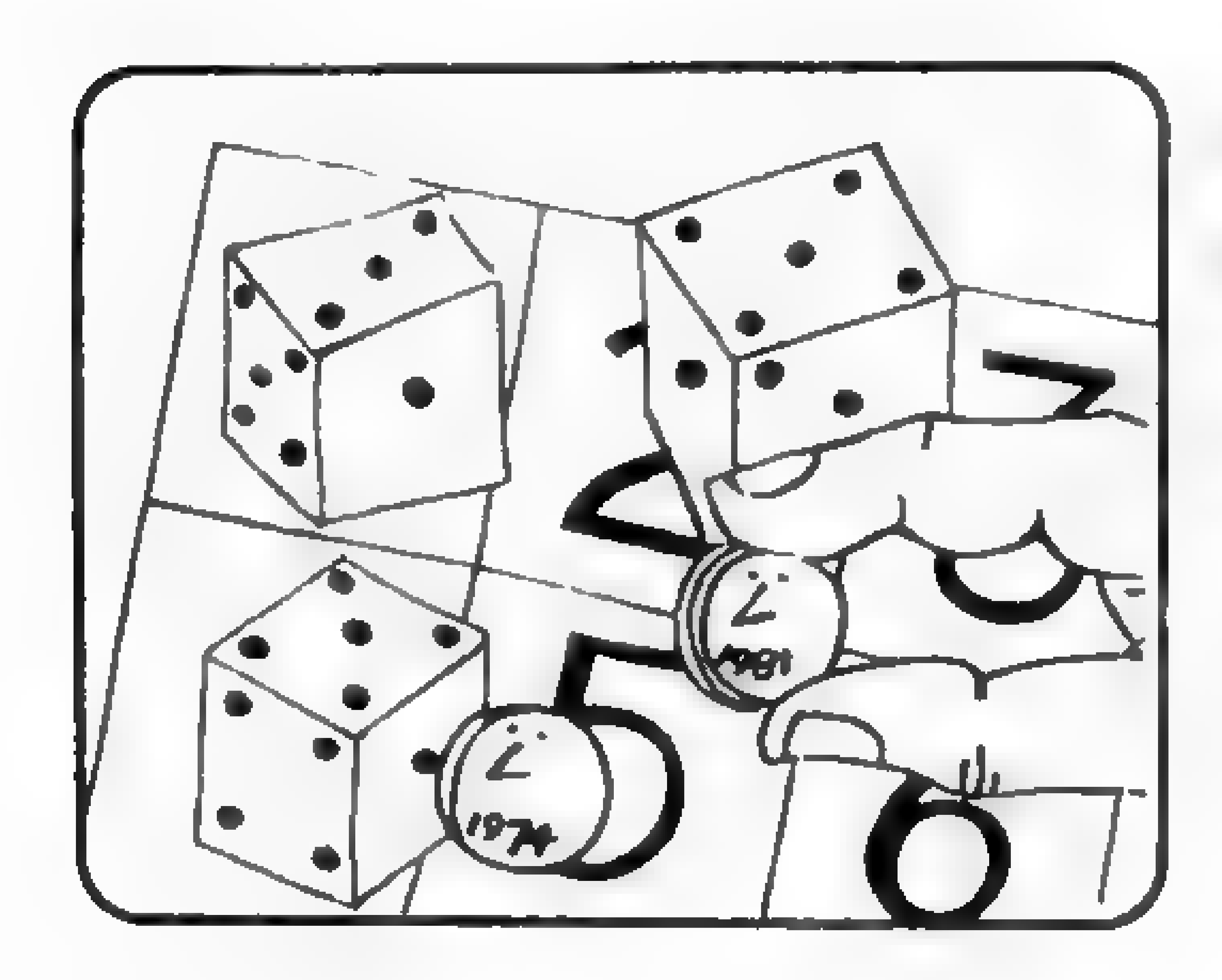


圖 4：馬先生：「可是我賭錢的機會還更好。如果我賭一塊錢，譬如說我押五；而有兩個骰子都出現五，我就贏了兩塊錢，如果三個都出現五，我就贏三塊錢。這個遊戲中我一定是佔上風。」

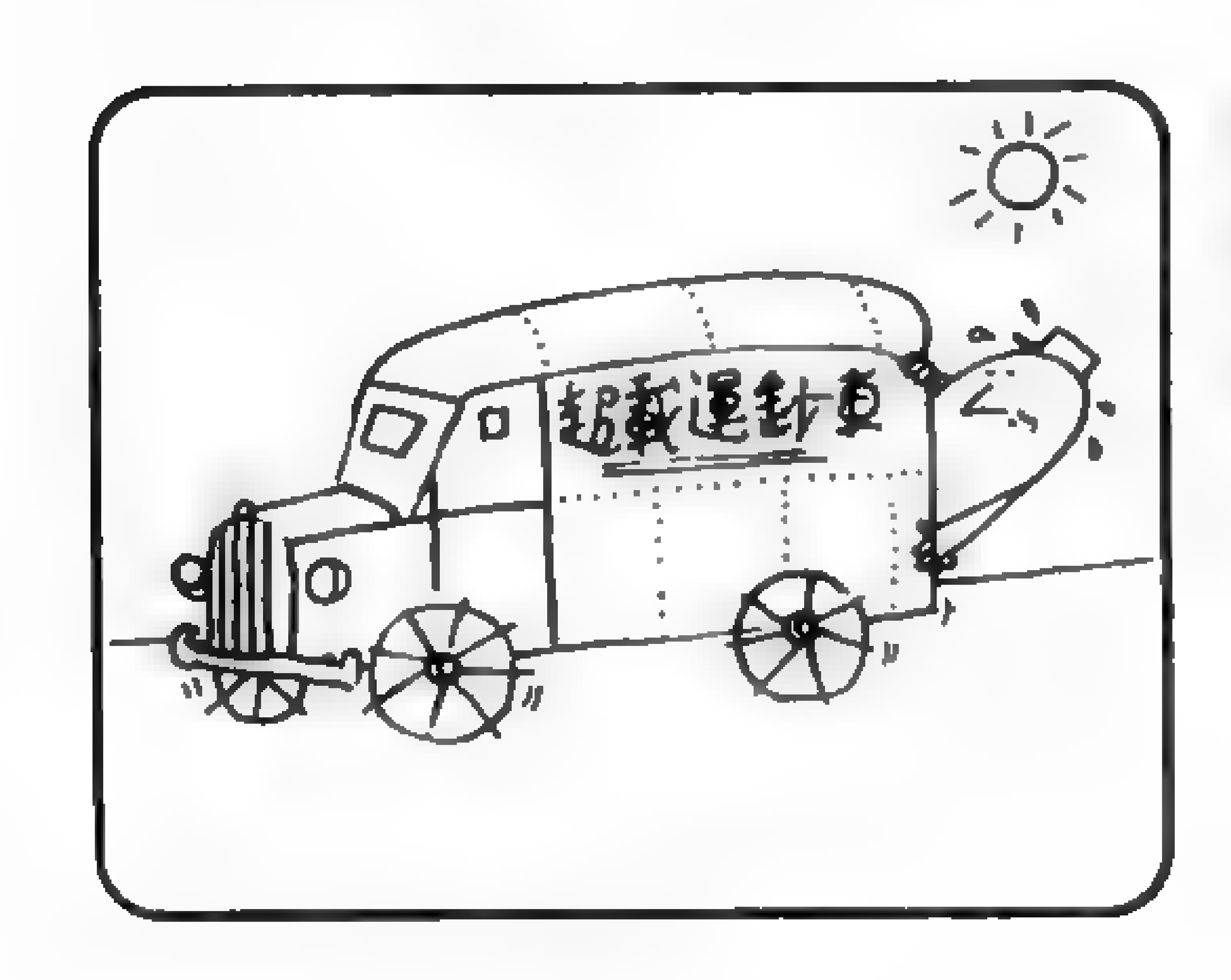


圖 5：因爲顧客都這麼想，難怪賭場的莊家會成爲百萬富翁。爲什麼「試手氣」的遊戲會對莊家有利呢？

美國和其他國家的許多賭場內，都有「試手氣」的遊戲。在英國，十八世紀早期時，這種遊戲叫做「汗布」(Sweat-cloth)，後來又叫做「鳥籠」(Bird Cage)。

在賭場，莊家常高喊著「每次都有三家贏，三家輸」來招徠顧客，讓人覺得這是個公平的賭局。事實上，如果每次三個骰子出現的號碼都不同，這個賭局才眞的公平；每轉動完一次籠子，莊家就能從輸的三家收到三塊錢（假設每人各下一元的賭注），然後付出三元給三位贏家。莊家佔便宜的是，總是有兩個或三個骰子，會出現相同的數字。如果有兩個骰子一樣，莊家可以拿走四元，而只要賠三元，能賺一元；如果三個骰子的數字都一樣，莊家拿走五元賠三元，可以賺兩元。這種情形讓莊家佔盡優勢。

要以公式算出莊家的勝算，是件麻煩事。最保險的辦法是把三個骰子所有可能出現的情形都列出來，一共有二百一十六種，你會發現其中一百二十種是三個骰子都不一樣，九十種是兩個一樣，還有六種是三個都一樣。假設我們玩二百一十六次，所有可能的二百一十六種結果都出現了，每回都有六個人各押一個號碼下注一元，

莊家一共會收到一千二百九十六元(216×6＝1296)的賭注。三個骰子都不同時，他一共要付出七百二十元(120×6＝720)；兩個一樣時，莊家要付出一百八十元(90×2＝180)給賭到單顆骰子的人，付二百七十元(90×3＝270)給賭到相同號碼的兩顆骰子的人；三顆一樣時，莊家要付出二十四元(6×4＝24)。總共要付出一千一百九十四元，帶來一百零二元的利潤。若是除以一二九六次，等於莊家有略高於七·八%的利潤，這表示每個人下賭的一元中，長期下來可以預期有七點八分的損失。

如果只擲一次的話，下注的勝算又如何呢？如果把三個骰子漆上紅、綠和藍三色，紅骰子出現「1」時，其他兩個骰子有三十六種不同的配合；繼續算下去，紅骰子不是「1」、綠骰子是「1」、藍骰子隨意的情形有三十種；最後，如果藍骰子出現1，而紅、綠骰子除了1以外，可以出現任何數字的話，有二十五種情形。因此在二百一十六種情形中，至少有個骰子是1的情形有九十一種，所以賭「1」贏的機率是二百一十六分之九十一，比二分之一少很多，其他號碼也一樣。

皮夾遊戲

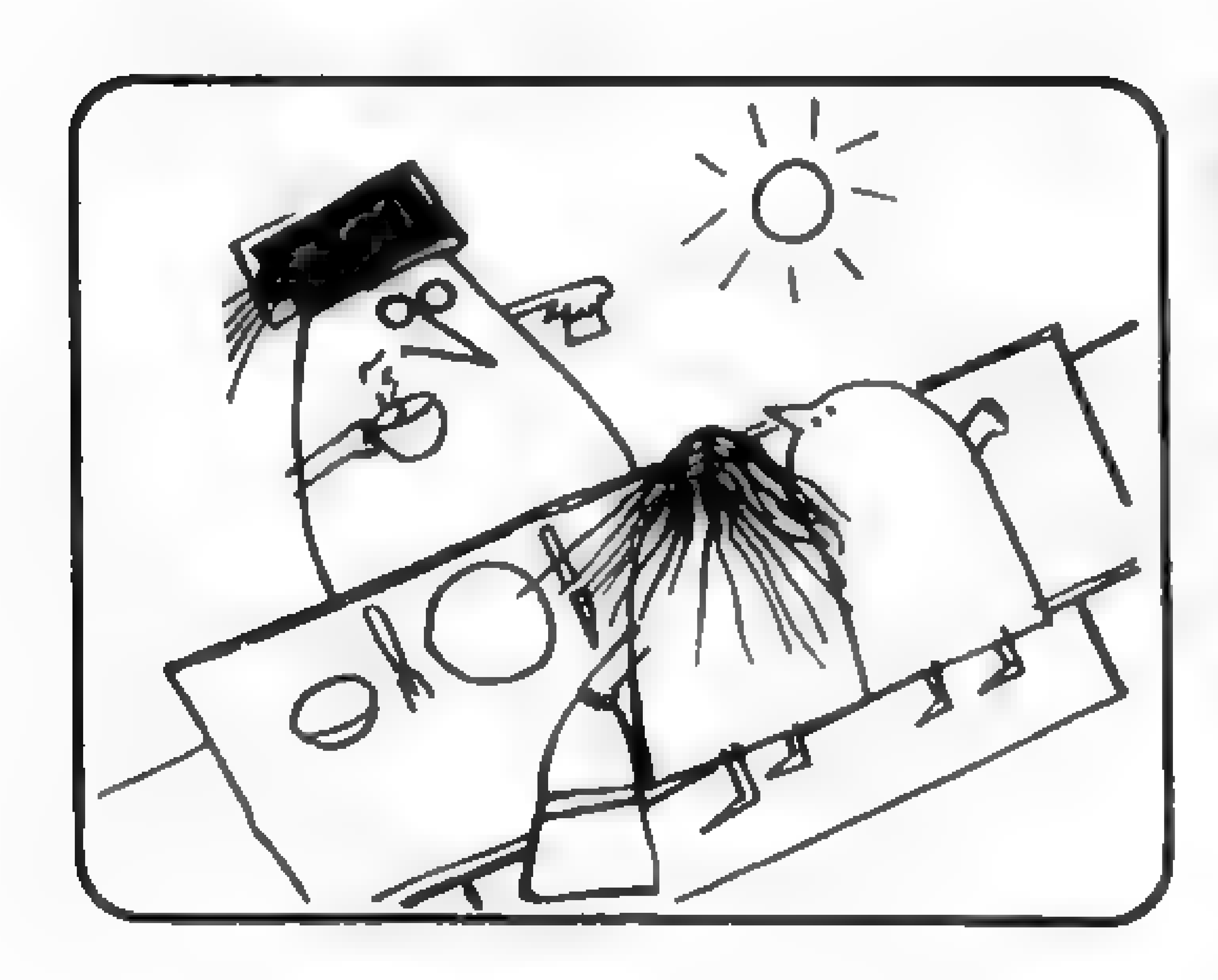


圖 1：史蜜斯教授和兩位數學系的學生共進午餐。
史教授：「我教你們玩個新遊戲。把你們的皮夾放在桌上，數一數每個皮夾中有多少錢，誰的錢少，就能贏到另外一個皮夾內所有的錢。」

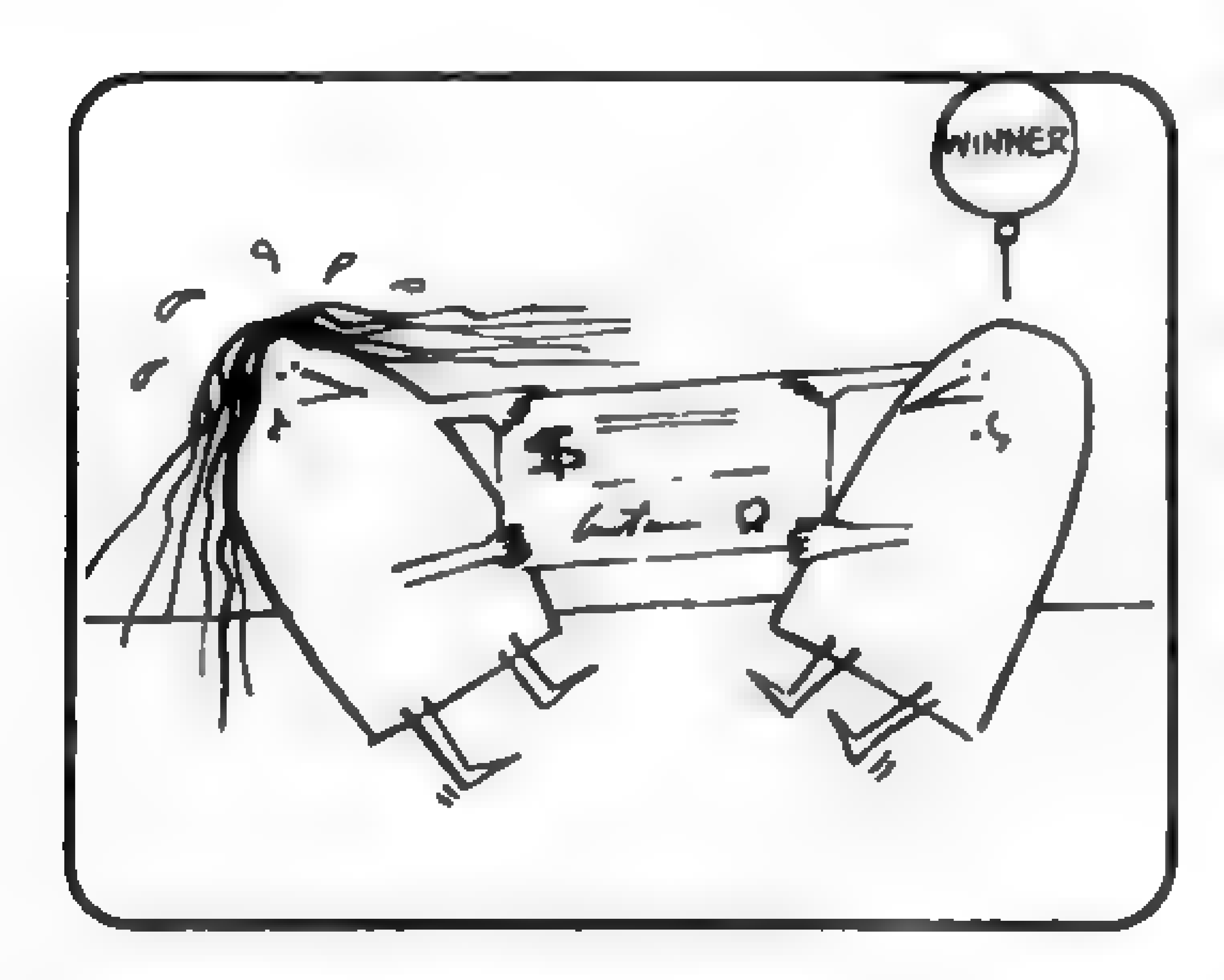


圖 2：喬：「嗯，如果我有的錢比吉兒多，她只能贏走我現有的錢；但是如果她的錢比我多，我就會贏到比我現有的錢還多的錢，所以我能贏到的比我會輸掉的多—這個遊戲對我有利。」

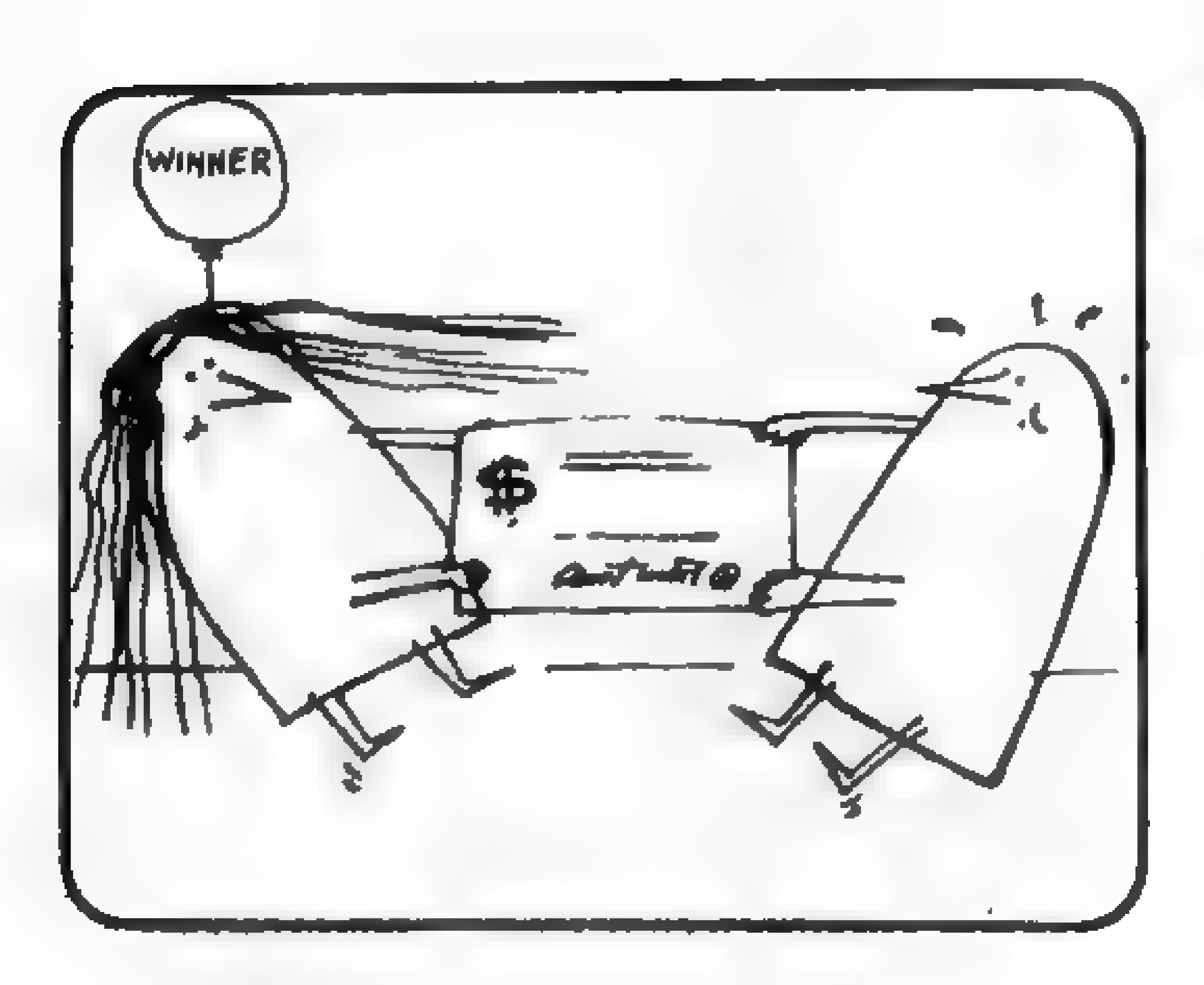


圖 3：吉兒：「如果我有的錢比喬多，他只能贏走我現有的錢；可是如果他有的錢比較多，我就會贏，贏到的錢比我現有的還多，所以這個遊戲對我有利。」



圖 4：怎麼可能一個遊戲同時對雙方有利？不可能的！是不是因爲雙方都誤以爲自己輸或贏的機會都一樣，所以才引出這個矛盾？

這個可愛的矛盾是由法國數學家葛來奇(Maurice Kraitchik)提出的，在他所著的「數學消遣」(Mathematical Recreation)書中，用領帶代替皮夾：有兩個人都說自己的領帶比較好，他們找來第三者仲裁，贏的人要把領帶送給輸的人以示安慰。兩人各自思索道：「我知道我的領帶值多少，我可能會輸，可是我也可能會贏到一條更好的領帶，所以這個比賽對我有利。」怎麼可能一個比賽雙方都有利？

如果我們利用一些假設來仔細定義這個狀況，那麼這會是個公平的遊戲。當然，如果我們事先知道參賽者中，有一人習慣帶著較少的錢（或是較差的領帶），那麼這就不是場公平的比賽。如果無法得知這點，我們可以假設參賽者帶的錢是從零到某個數字—就假設是一百元—之間隨意一個數目。如果我們依此假設，列出一個矩陣表，我們可以看到結果是「對稱的」(Symmetrical)，並不對任何一方有利。

不過，這並未指出參加比賽的兩人，他們推理的錯誤出在那兒，我們一直無法找出簡單的方式來說明它，葛來奇幫不上忙，就目前所知，也沒有其它參考資料。

沒有差別的原則

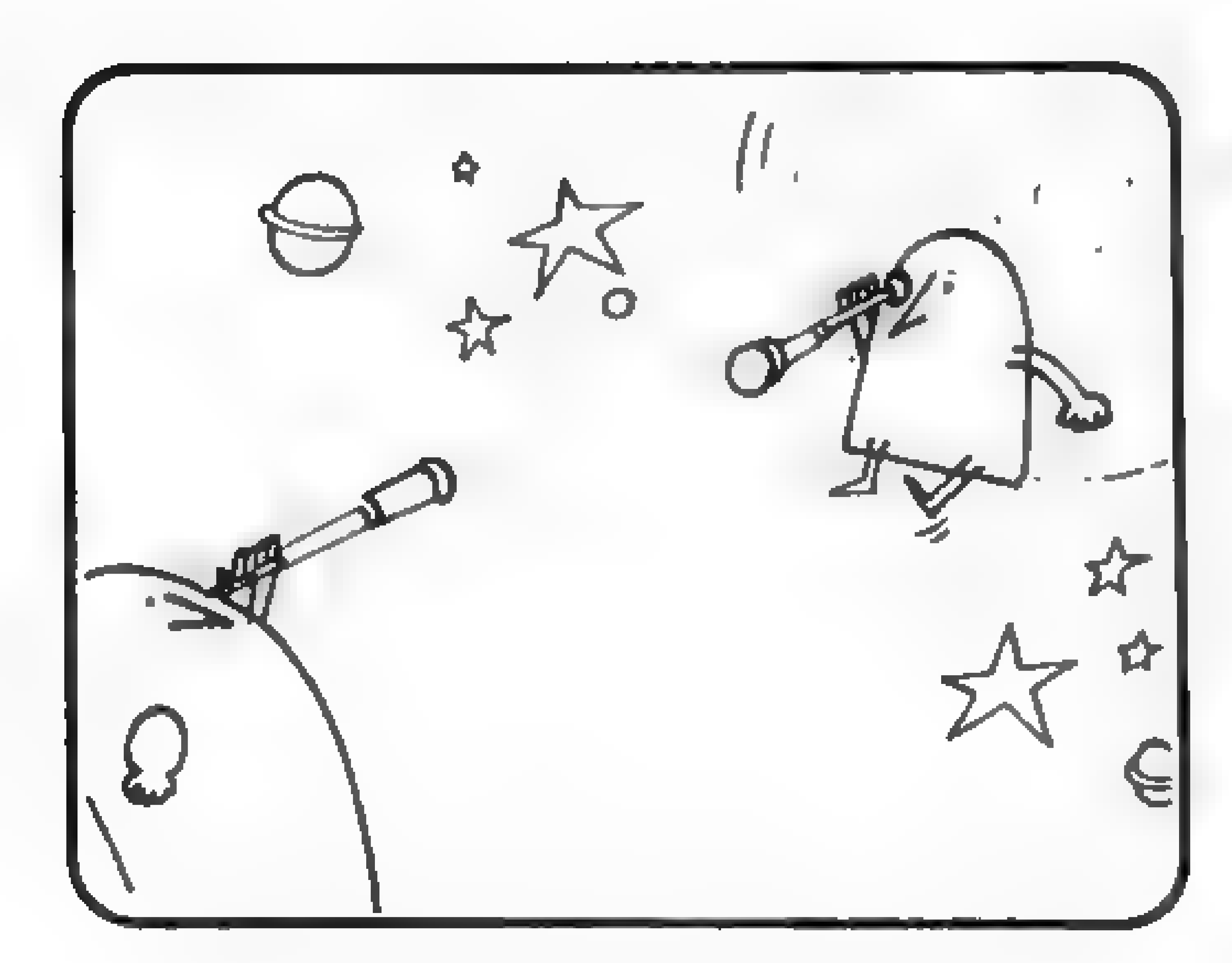


圖 1：在土星中最大的衛星一泰坦星(Titan)上有生命存在嗎?

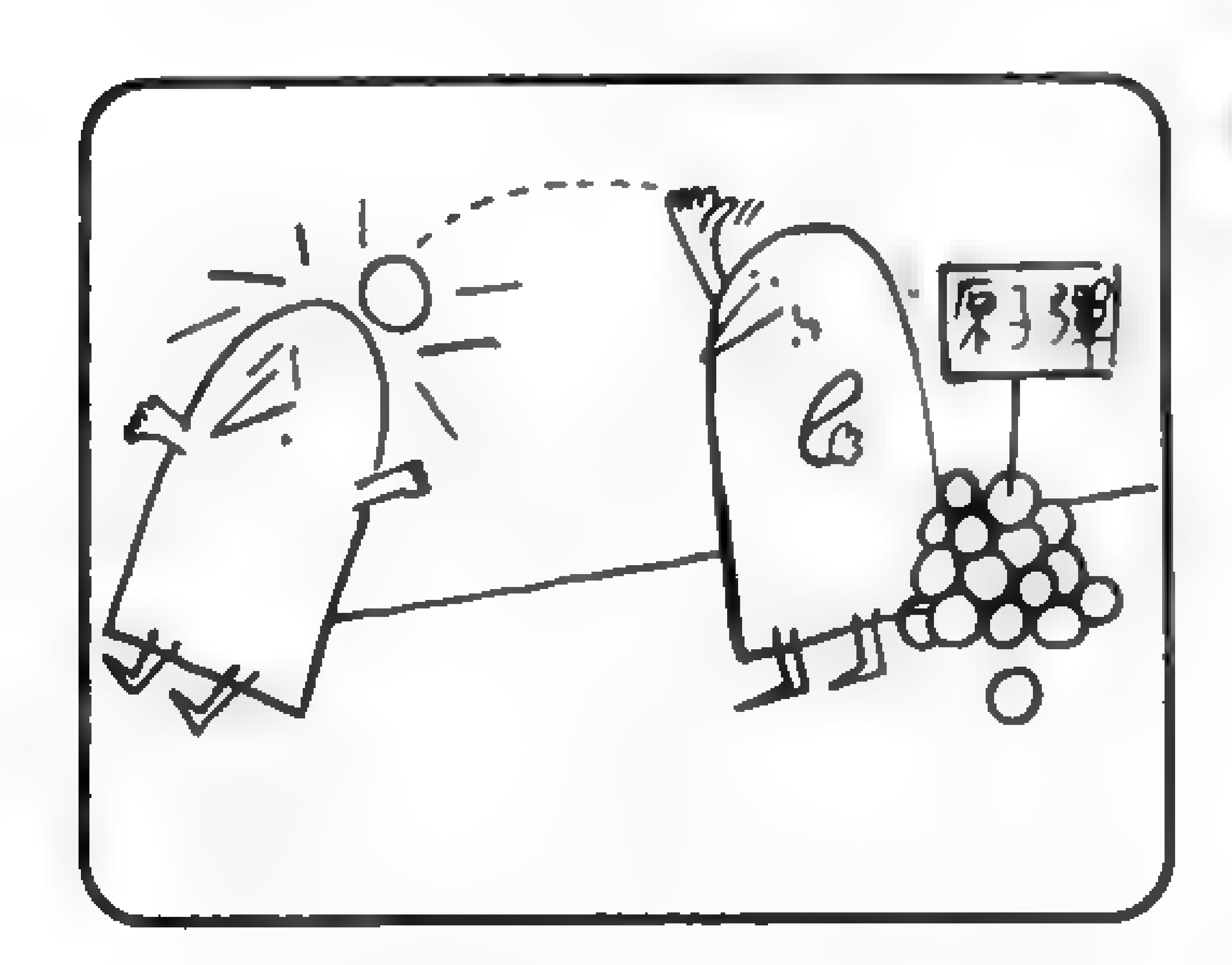


圖 2：將來會不會有核子戰爭?

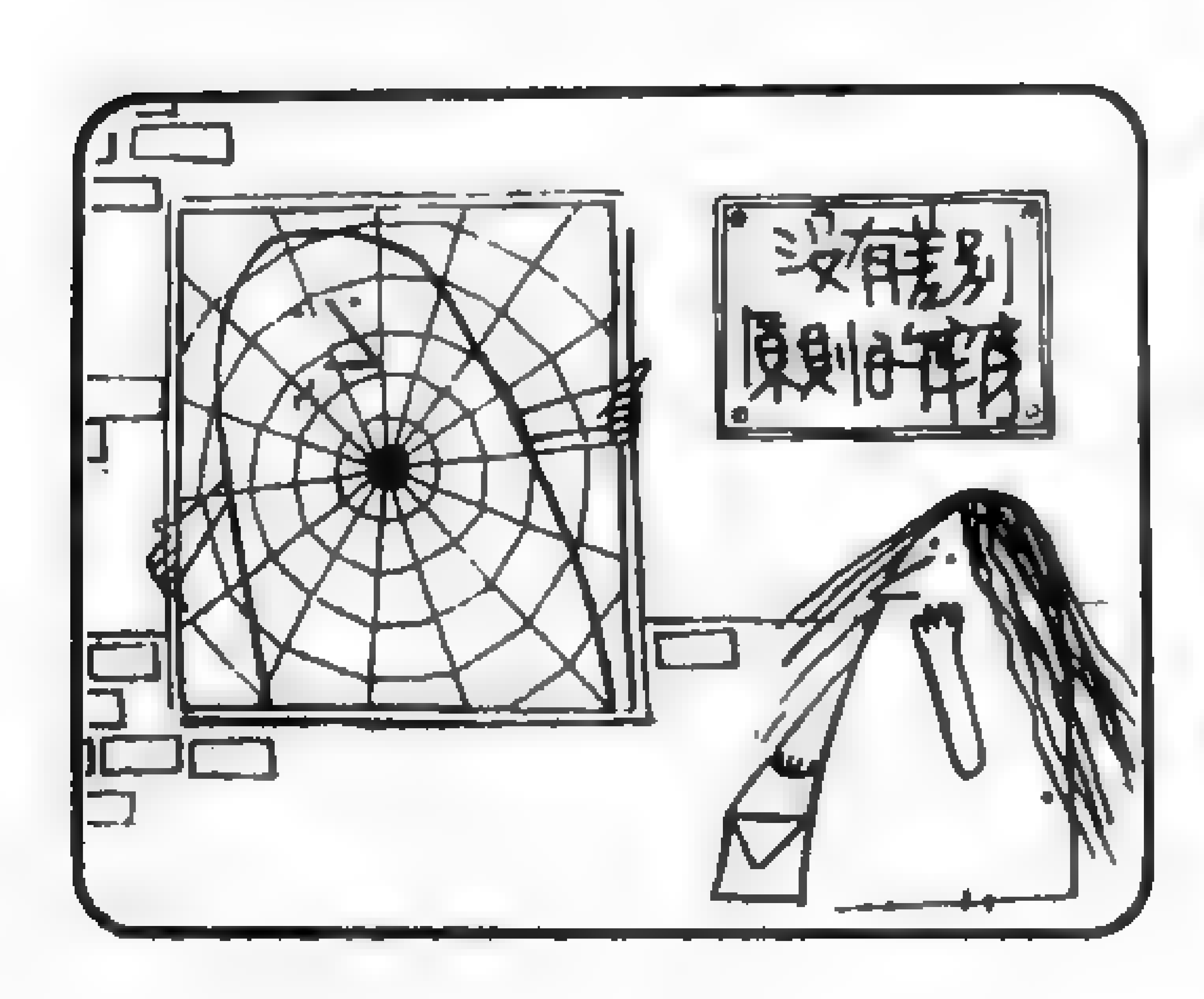


圖 3：如果你認爲回答這類問題，是或不是都一樣可能，那麼你正愚蠢得在運用所謂「沒有差別的原則」(principle of indifference)。不經意的運用這個原則，已經使許多數學家、科學家、甚至大哲學家陷入荒謬的網羅中。

經濟學家凱因斯(John Maynard Keynes)在他著名的「機率論」(Treatise on Probability)中，把「沒有差別的原則」改名爲「推理不足的原則」(principle of insufficient reason)，可解釋成：如果我們沒有足夠的理由來認定一件事的眞或僞，那麼我們指定爲眞（或爲假）的機率是一半。

這個原則已經歷史久遠並且惡名昭彰，被廣泛運用在各種領域中，像科學、倫理學、統計學、經濟學、哲學以及心靈研究。如果不是正確使用這個原則，會導出荒謬的矛盾和邏輯上明顯的牴觸。有位法國天文學家和數學家拉柏列斯(Laplace)用此原則爲基礎，算出明天太陽昇起的機率居然是一百八十二萬六千二百一十四分之一。

現在讓我們來看看，如果把這個原則不經意地運用在關於泰坦星和核子戰爭的問題上，會產生怎麼樣的牴觸。在泰坦星上有生命存在的機率是多少？根據「沒有差別的原則」，答案是二分之一；泰坦星上沒有簡單植物存在的機率是多少？仍是二分之一；那麼在泰坦星上既沒有簡單植物也無簡單動物存在的機率是多少？根據

機率的算法，必須把二分之一乘以二分之一，答案是四分之一。這就表示在泰坦星上有生命形式存在的機率昇高爲四分之三($1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$)，與先前估計的二分之一不合。

在公元兩千年以前發生核子戰爭的機率是多少？根據「沒有差別的原則」，答案是二分之一；不會有原子彈掉在美國的機率是多少？答案是：二分之一；不會有原子彈掉在蘇俄的機率是多少？二分之一；法國的情形呢？也是二分之一。如果我們用相同的推理，推到十個國家，那麼沒有原子彈掉在這十個國家之中的任何一個國家，機率是二分之一的十次方，即一〇二四分之一；用一來減，就得到原子彈會掉在這十個國家中的機率是一〇二四分之一〇二三。

以上的兩個例子說明了「沒有差別的原則」要靠另外一個假設，才能產生那樣荒謬的結果—我們已經心照不宣地假設獨立事件並非獨立的。根據進化論，有智慧生物存在泰坦星的機率，隨著是否有較低等生物的存在而異。同樣的情形，原子彈是否會落在美國的機率，要看原子彈落在蘇俄的機率而定。

另外有個好例子可說明不小心使用沒有差別的原則，那就是「不明立方體的矛盾」(paradox of unknown cube)。如果有人告訴你櫥子中藏著一個立方體，邊長在二到四呎間，你沒有理由假設邊長是小於三或大於三，所以你最可能猜這個立方體的邊長是三。現在來看這個立方體的體積，一定會在八（二的三次方）和六十四（四的三次方）立方呎之間。你沒有理由假設體積是在三十六〔(8＋64)÷2＝36〕之上或之下，所以你會猜它的體積是三十六立方呎，換句話說，你對這個立方體最準的估計是邊長爲三，體積爲三十六——多怪異的立方體！用另一種方式來說，如果你把沒有差別的原則應用在立方體的邊長上，則邊長爲三，體積爲二十七；同樣的原則應用在體積上的話，則立方體體積是三十六，邊長約三點三（三十六開立方根）。

這個立方體的矛盾是個很好的範例，可以用來說明，已得知一個數量的最大值和最小值，如果假設眞正的值最可能是中間值時，科學家或統計學家會碰到的麻煩。在凱因斯的書中，還有許多類似矛盾的例子。

只有在對稱的狀況下，這個原則才可以

有效運用在機率上。例如一塊錢硬幣在物理上是對稱的，也就是說它的密度均勻——重量並未偏向任何一面，在空氣中兩面所承受的力量（包括重力、摩擦、氣壓等等）都是對稱的，沒有那一面受力比較大。於是我們假設正反兩面出現的機率是一樣的。相同的對稱可以用到六個面的正立方骰子，或是有三十八條溝道的輪盤。世界上所有賭場中的這類遊戲，都說明了這種對稱的正確性和限制性。而在所有這類對稱不存在（或是不知道存不存在）的情形中，運用「沒有差別的原則」通常會導出荒謬的結果。



統　計

統計是取得數字後，加以整理和分析的工作。這一門學科在現今高度複雜的社會中，重要性日增。一般人都受到大量數字的轟炸，從經濟現狀到哪家牌子的牙膏最好；除非他們對初級統計有基本認識，否則根本沒法作出明智的選擇。現在很難找到有哪一門學科是不牽涉到統計的；至於像保險業、公共衛生、廣告業等這類行業，更是與統計密不可分。

這章不是要介紹統計學，也不是在教初級統計，只是提供一些似是而非的例子，來引起讀者學習統計的基本數學的興趣。

首先我們利用一個故事來介紹統計上三個基本的衡量數字：平均數(mean)、中位數(median)和衆數(mode)。然後舉幾個使用資料上錯得離譜的例子。這些例子可謂是利用統計說謊的藝術，希望讀者能對這些陷阱有所警覺。

今日大家對天文以及所有超乎尋常的事情都具有高度的狂熱，可是却只有很少人瞭解這是由於他們本身缺乏統計的知識，才會對那些令人驚訝的巧合印象深刻。其實以統計和機率觀點來看，那些巧合並不出奇。

我們可舉一個生日的例子來看看。在一個團體中，隨機抽二十三人，其中至少兩人同天生日的機率比二分之一稍微高一些。但若隨機抽四十人，則機率增至將近十分之九。

剛開始，通常我們的反應是完全不相信，接下來就不妨實際做個試驗。我們可以在一個有四十名客人的宴會中，或是隨機在名人錄(Who's who)上選四十個名字，核對這些人的生日日期，看看結果如何。撲克牌裏的一些小把戲，其中的巧合簡直令人難以置信，其實說穿了也只不過是數學自然法則的結果。

若是你對這些問題背後的數學算法感到好奇，那麼下一步就是學習機率理論，來瞭解這一切到底是怎麼回事。這些矛盾正好提供我們按部就班學習數學的機會。

騙人的平均數

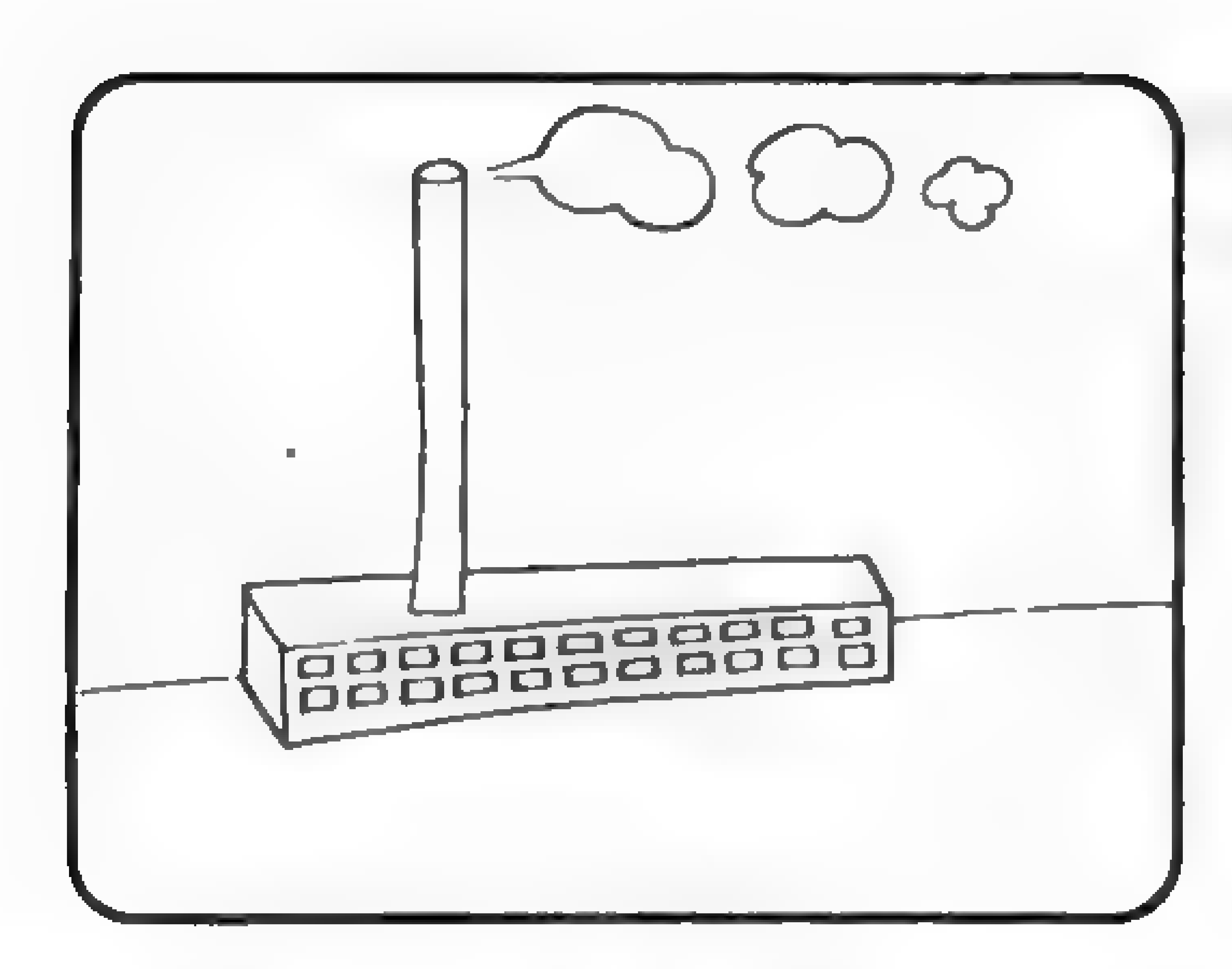


圖 1：吉士摩產品公司有家小工廠，專門製造「超級吉士摩」。

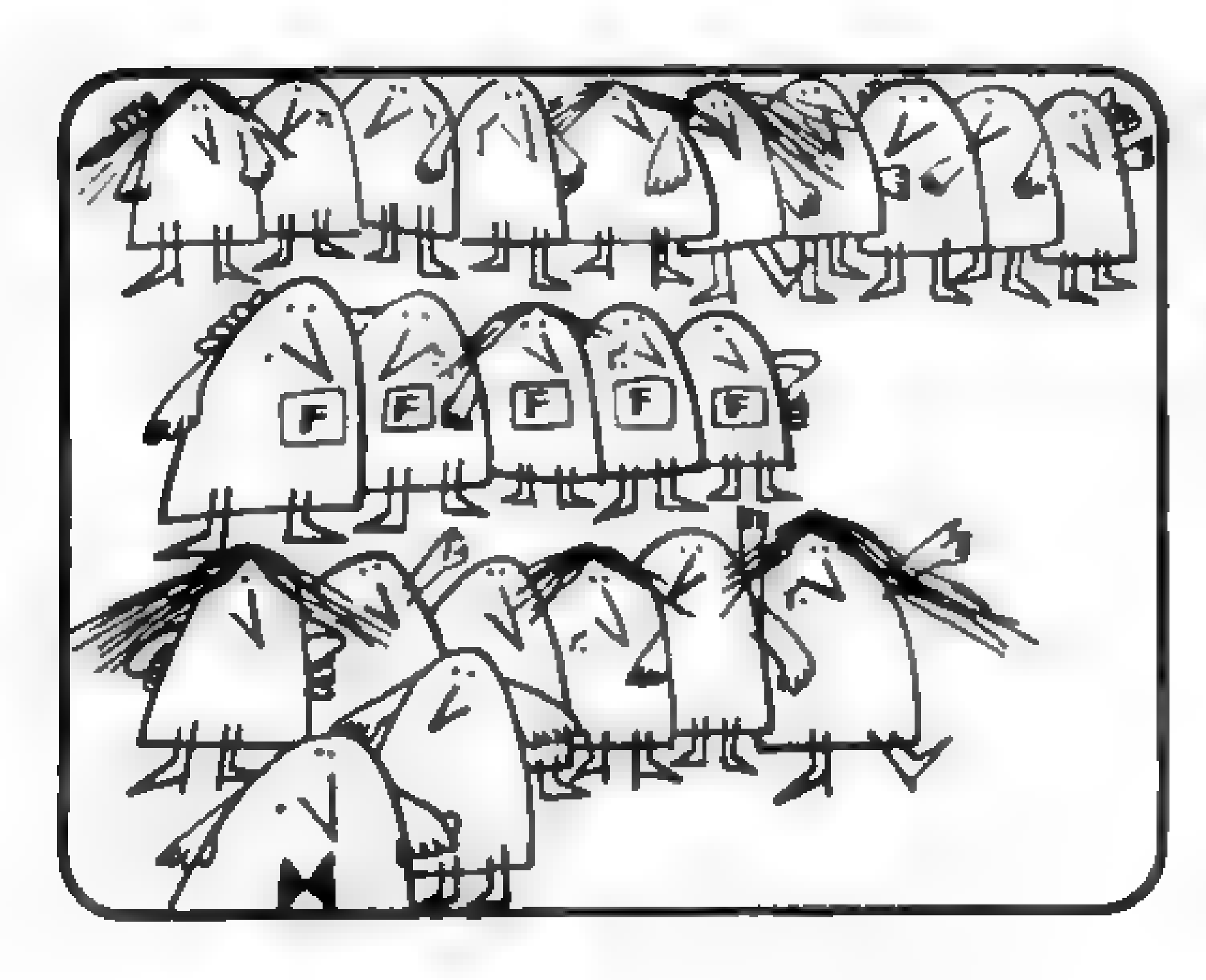


圖 2：管理階層包括吉士摩先生、他哥哥和六位親戚。勞工階層包括五位工頭和十位工人。他們生意很好，工廠還需要一位新工人。

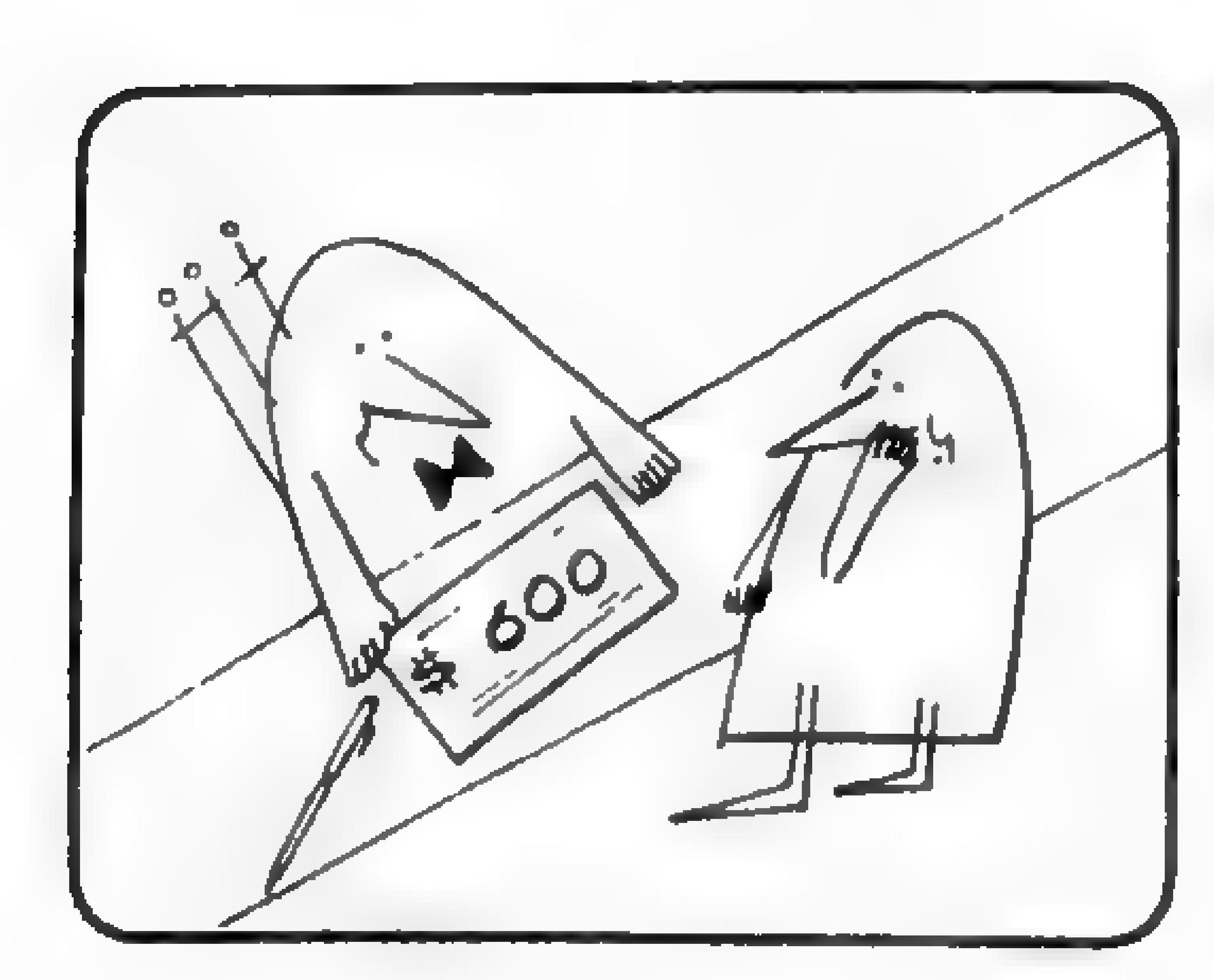


圖 3：吉先生面試來應徵工作的小陳。吉先生：「我們這兒薪水很高，平均週薪六百元，在你受訓期間，薪水是一星期一百五十元，不過很快就會提高。」

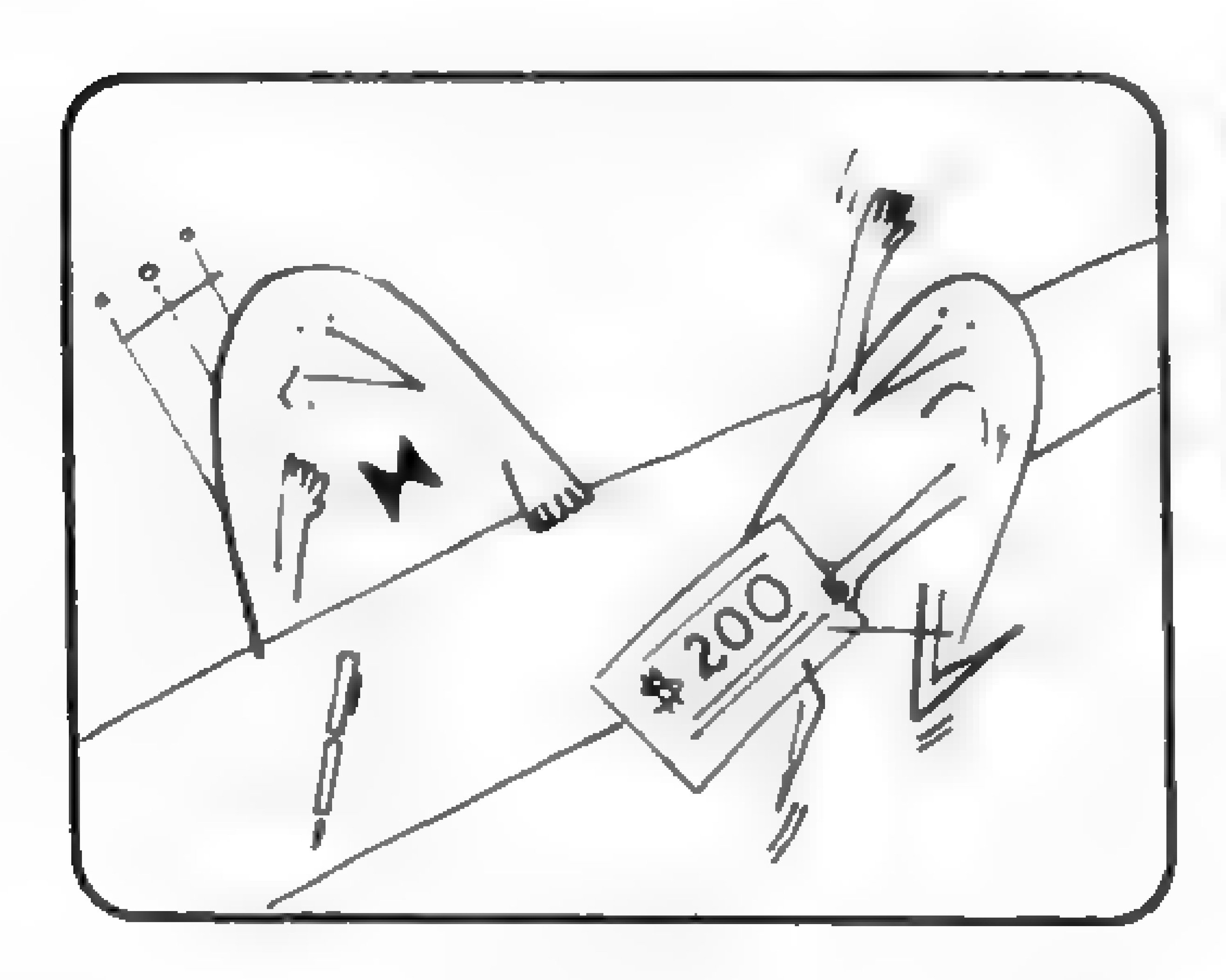


圖 4：工作了幾天後，小陳要求見老闆。小陳：「你騙我，我已經問過別的工人，沒有一個人的週薪超過二百元，怎麼可能週薪會是六百元？」

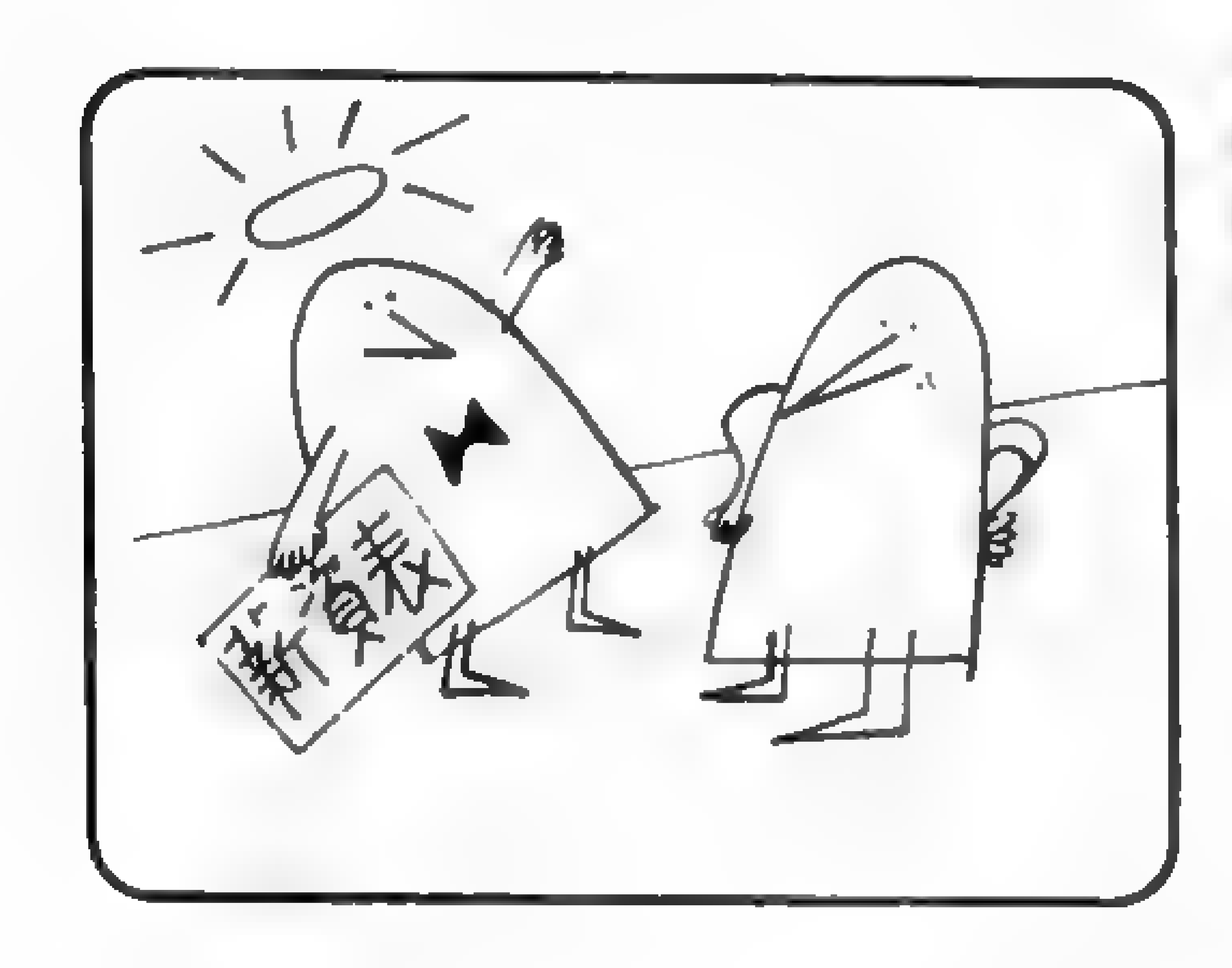


圖 5：吉先生：「小陳，先別那麼激動，平均週薪眞的是六百元，我算給你看。」

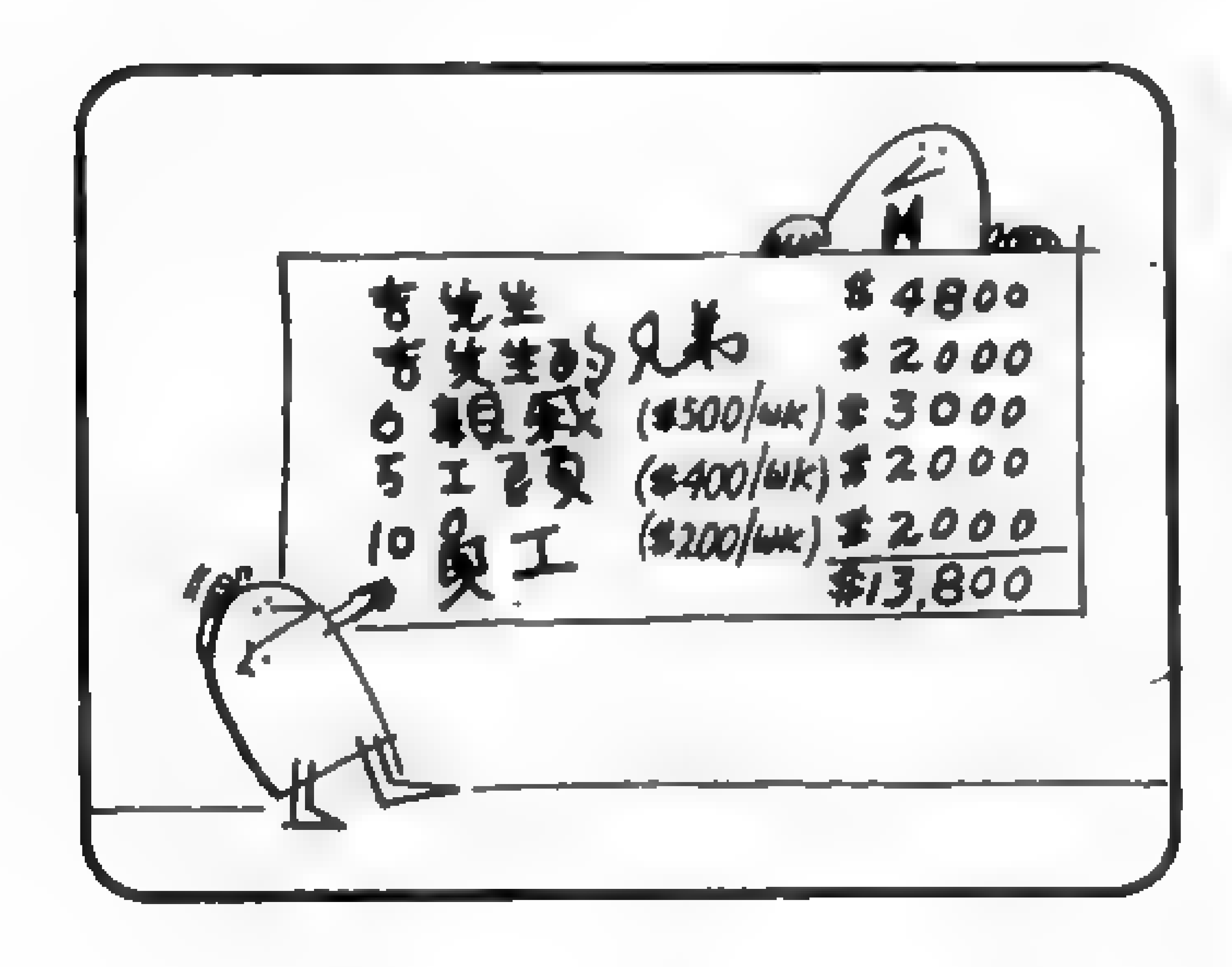


圖 6：吉先生：「這是我們每個星期付出的薪水，我拿四千八百元，我哥哥拿二千元，我六位親戚各拿五百元，五位工頭各拿四百元，十位工人各拿二百元，所以一星期共付給二十三個人一萬三千八百元，沒錯吧！」

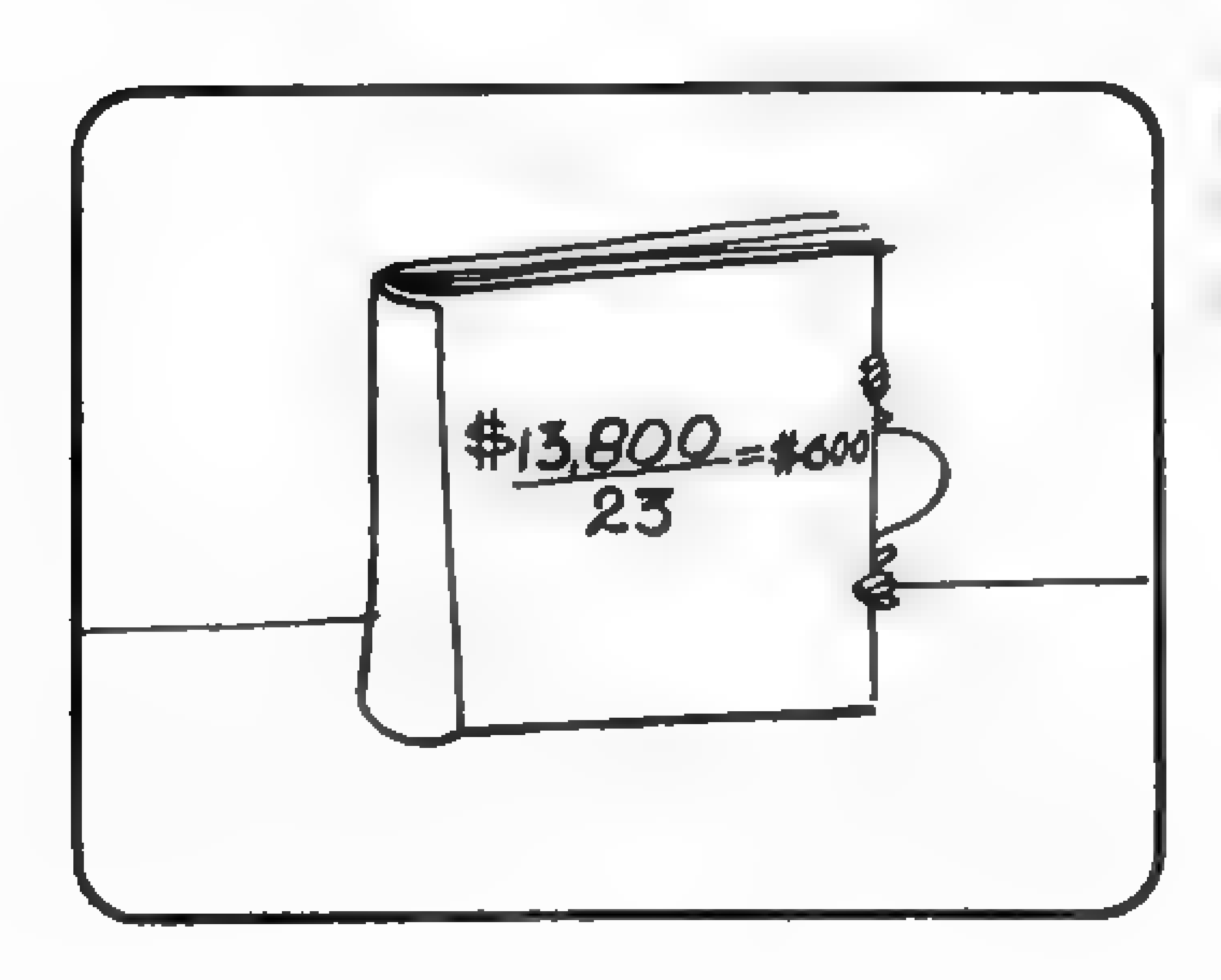


圖 7：小陳：「對、對！你是沒錯，平均週薪是六百元，可是我還是被騙了。」



圖 8：吉先生：「我不這麼認爲。你只是沒搞清楚，我原可把薪水依序列出，告訴你居中的薪資是四百元，可是那不是平均數，那是中間數。」



圖 9：小陳：「那一星期二百元是怎麼來的？」吉先生：「那叫眾數，就是最多人拿的薪水。」

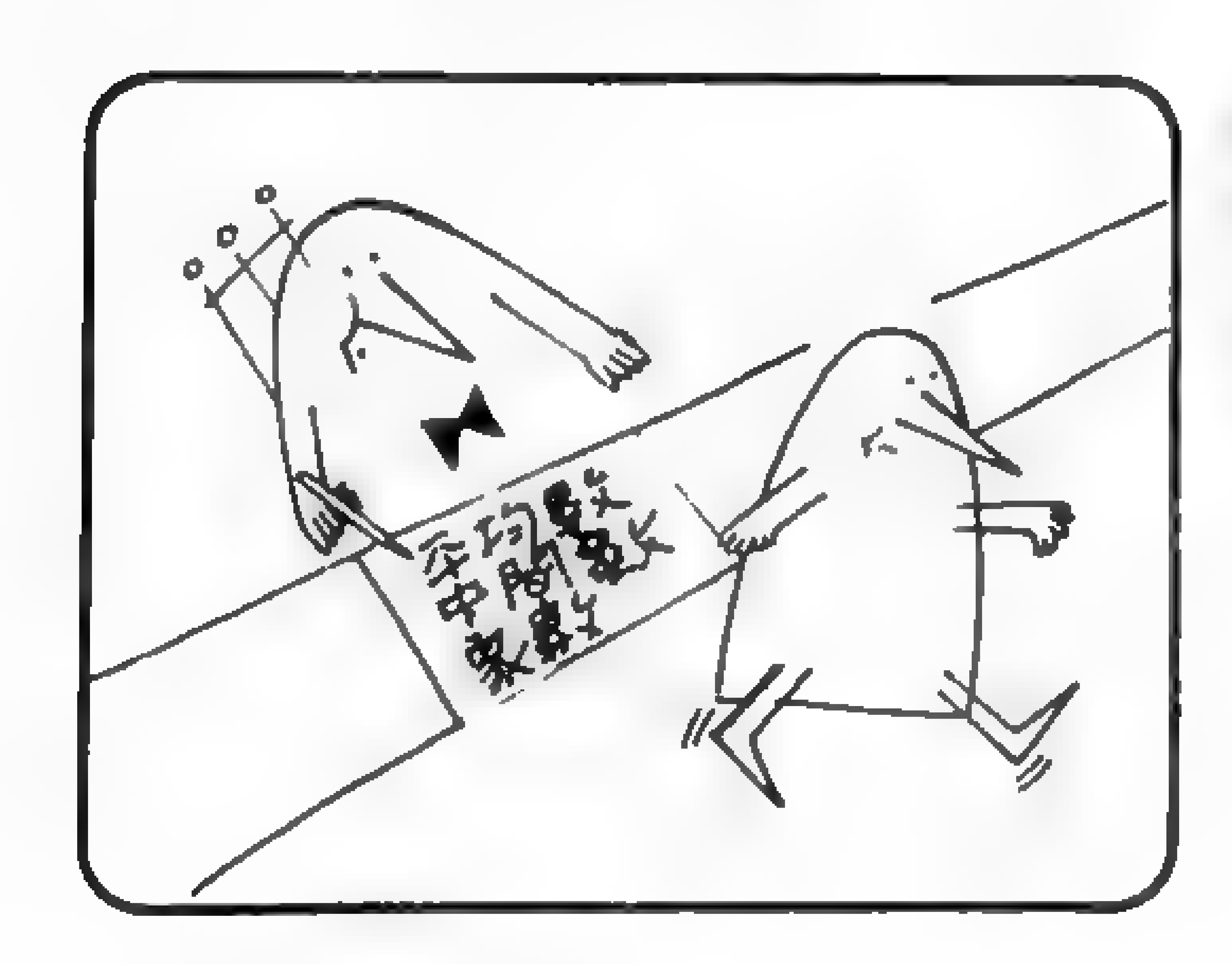


圖 10：吉先生：「年輕人，你的問題在你分不清平均數、中間數和眾數的不同。」小陳：「現在我清楚了，所以……我不幹了！」

統計數字所呈現出來的結果，有時會混淆而且完全不眞實。吉士摩工廠的故事就是對平均數、中數和衆數的誤解而導致的。

平均數其實是「算術平均數」的簡稱，它是個很有價值的統計值。如果資料中有極端懸殊的值，如吉士摩工廠中位居前二位的薪水，那麼薪水的「平均數」就會傳達錯誤的印象。

我們很容易找到其他用平均值陳述事情而產生誤導的例子。像一位記者報導某人在一條平均兩尺深的河中淹死。這條新聞嚇人嗎？若你知道那人正好淹死在某些深及十尺的地方時，你就不覺驚訝了。

有一個公司宣稱他們的政策很民主，因爲五十位股東共有六百張股東投票權，換句話說平均每位有十二張投票權。可是如果其中四十五位股東都只擁有四張票，而另外五位股東則各擁有八十四張票，平均數也是一人十二張—但是那五位股東就完全控制了整個公司。

更令人困惑的是，有時「平均數」不是指算術平均數，而是指「中數」或「衆

數」。「中數」是把所有數值照大小排列之後最中間的那個值。如果列出項是單數個，那麼中數就是中間的那一個；若是偶數個項，那麼中數就是指最中間那兩個數的平均值。

對圖中的小陳而言，中數比算術平均數有用，但甚至中數也讓人對公司的薪水產生錯覺。其實小陳最需要知道的是衆數──出現次數最多的那個數。像圖中，衆數是指最多人領的那份薪水值，這通常稱爲「典型例子」，因爲它出現次數最多。

年度風雲母親

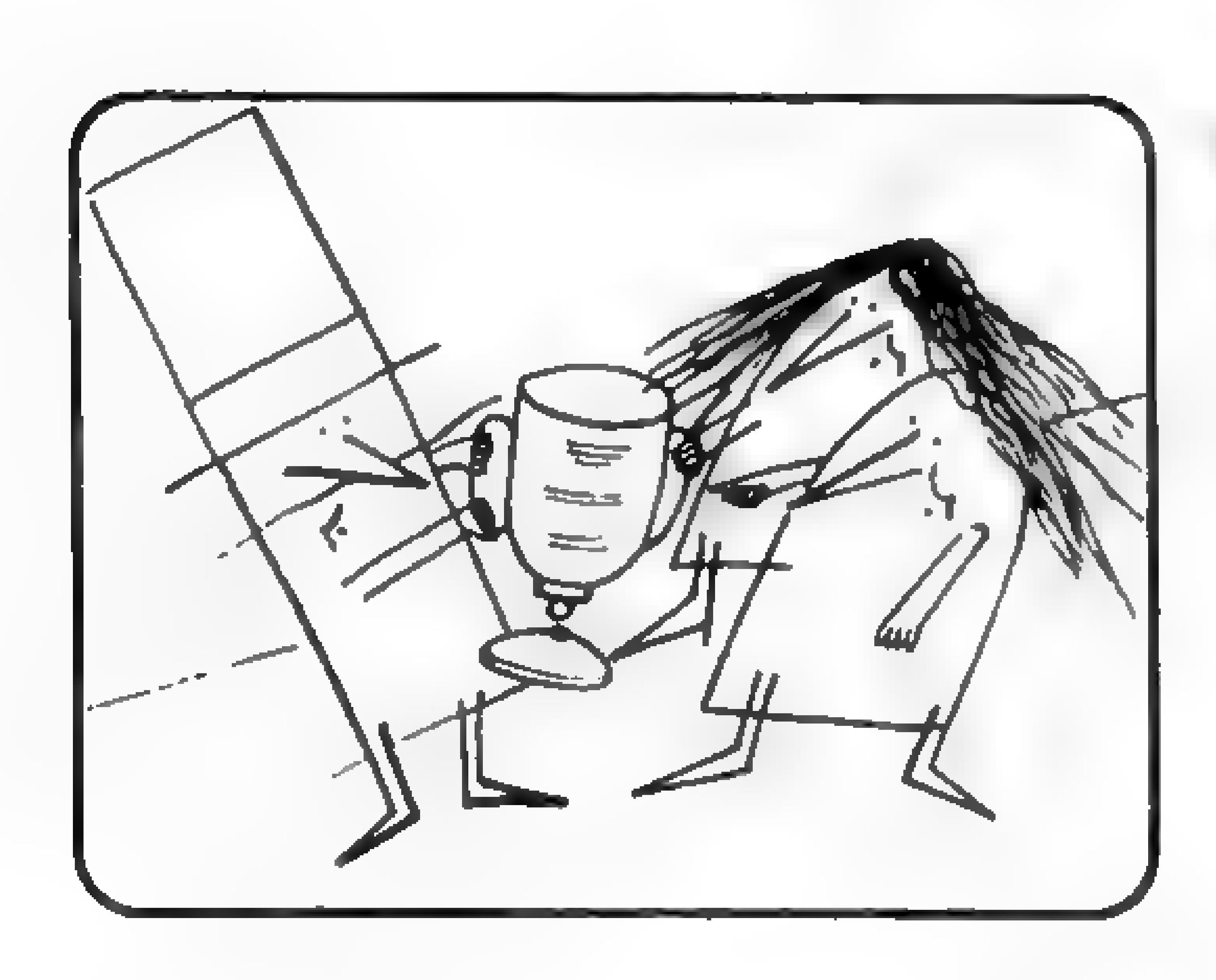


圖 1：下半年小陳的太太從鎮長手中接過一座獎盃—她被提名爲「年度風雲母親」。

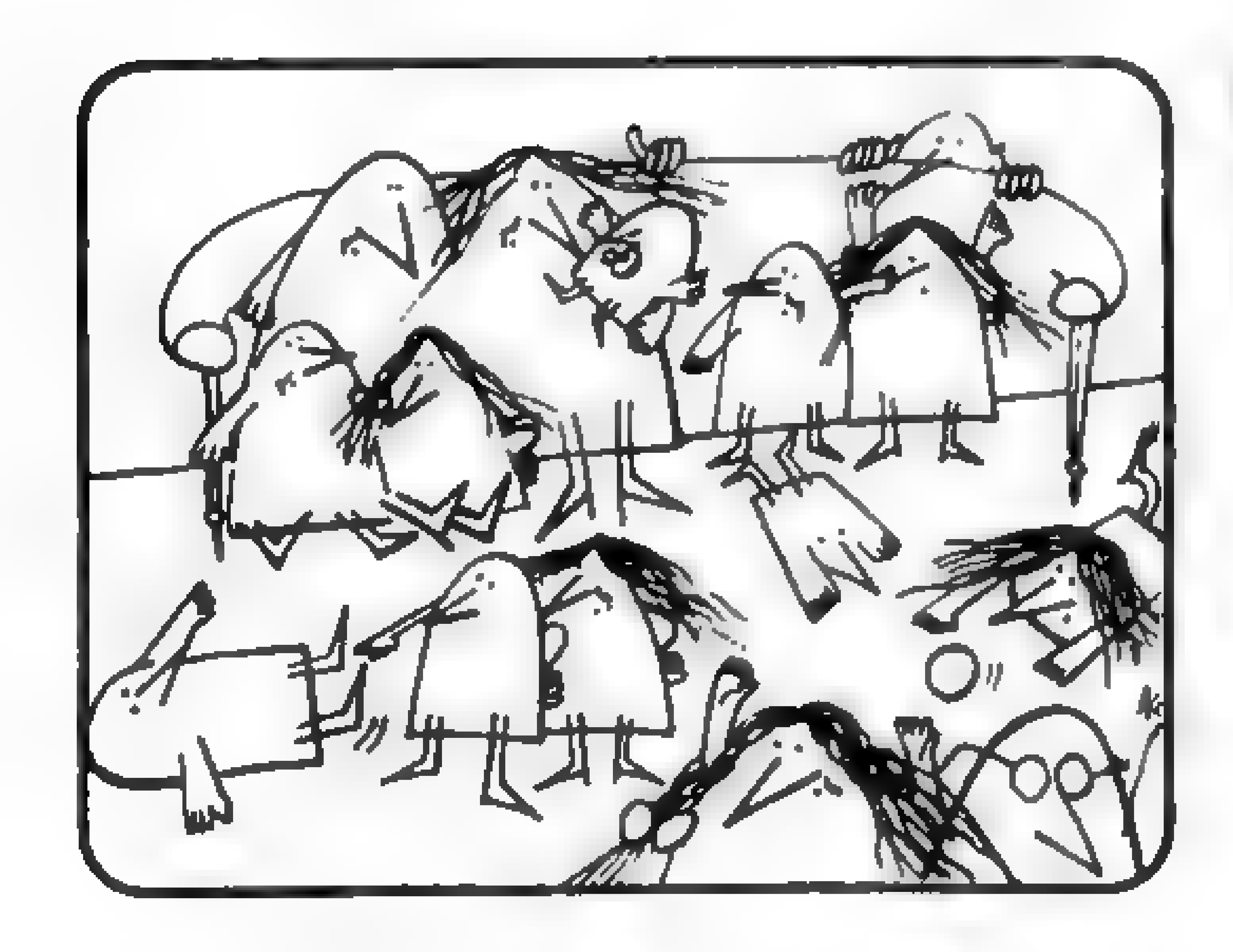


圖 2：當地報紙拍了一張小陳、他太太和他們十三個孩子的全家福照。

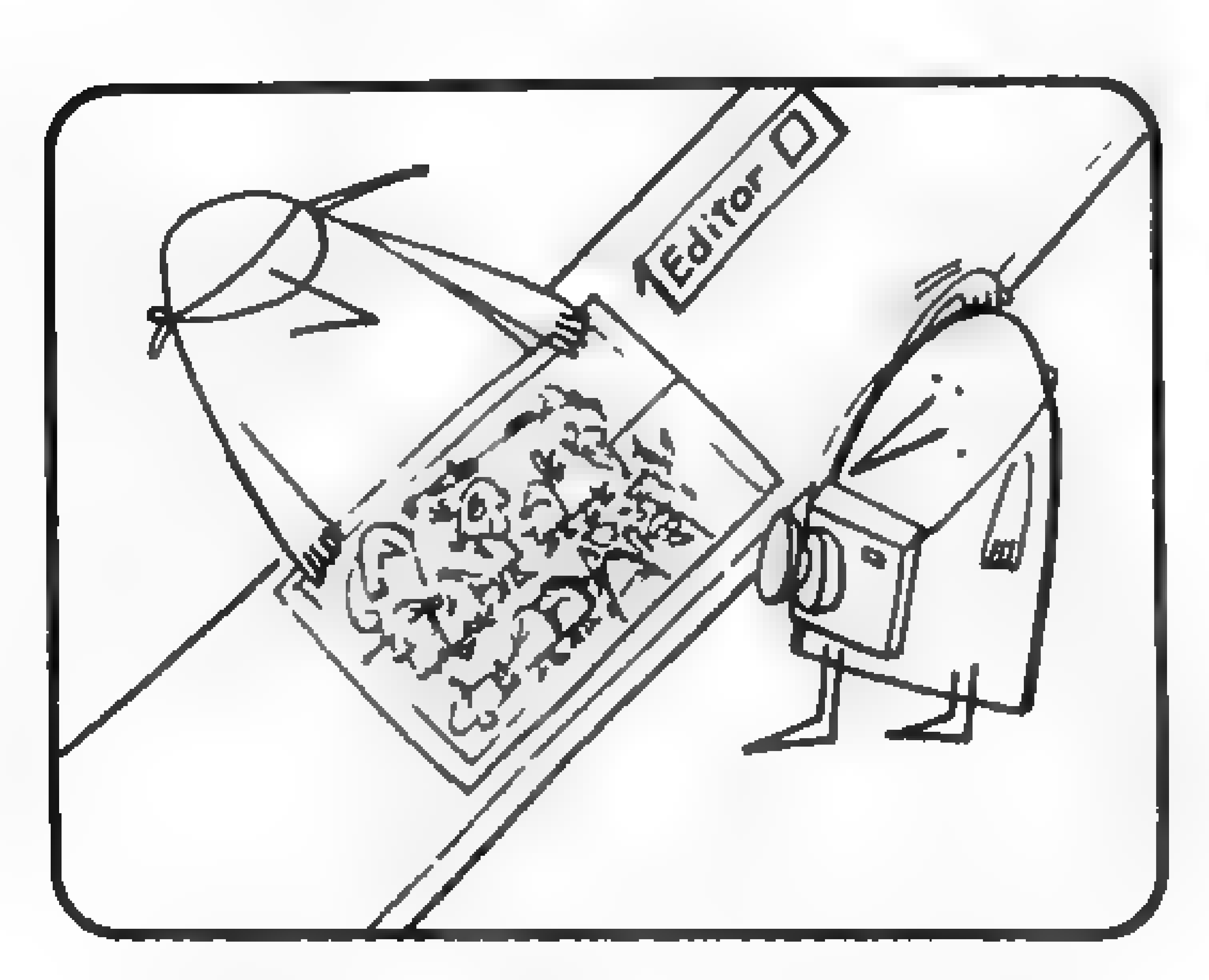


圖 3：報社編輯對照片很滿意。他說：「拍得好，小貝，我現在給你個新工作，幫本鎮平均人數的家庭拍張照。」

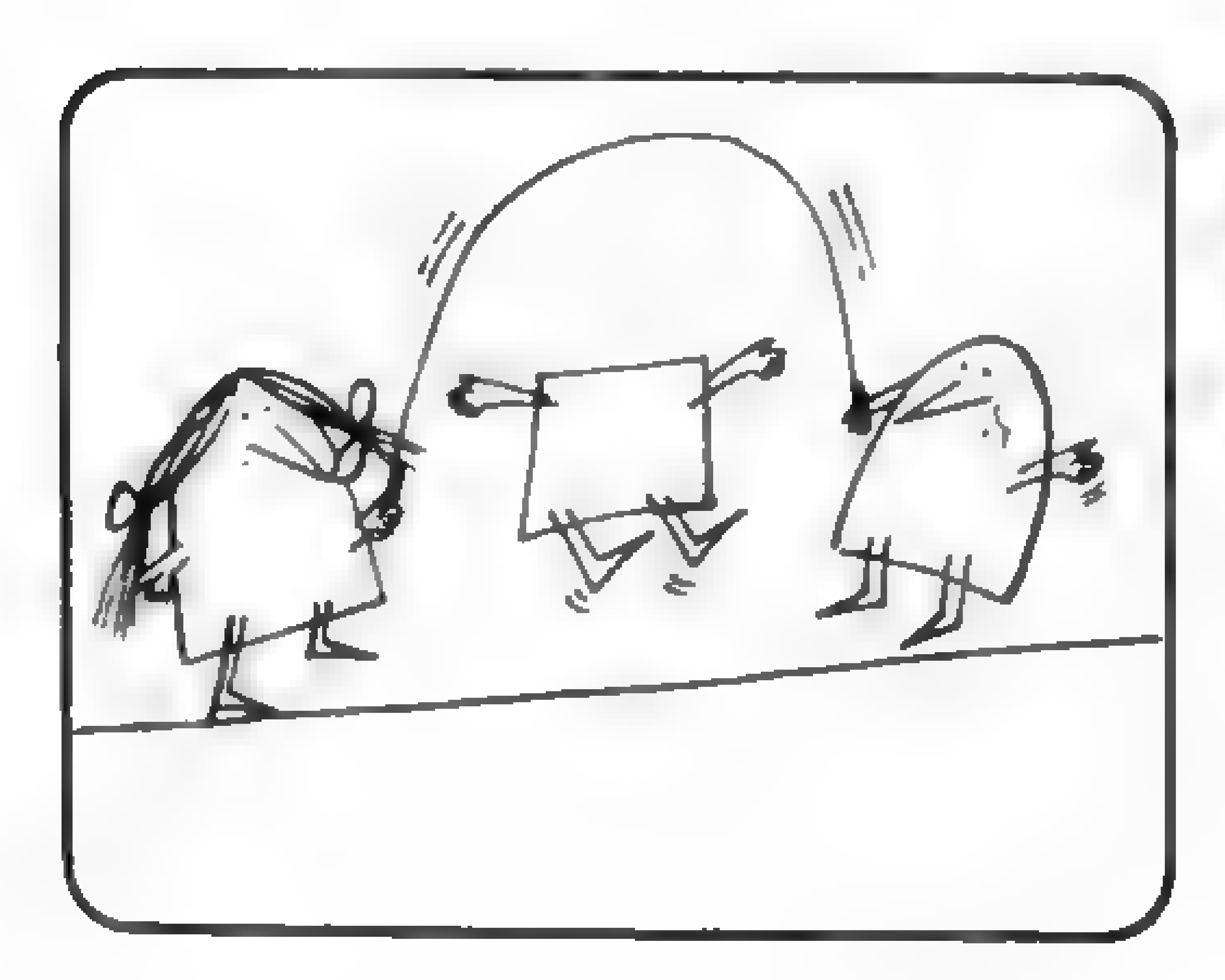


圖 4：攝影記者小貝沒法辦到，因為鎮中沒有任何家庭的人數剛好等於平均數一算出的子女平均數是二個半。

我們對「平均數」常有的另一種誤解，是認爲現實中不管什麼例子都可以得到平均數。看完「模範母親」的例子，我們知道沒有一個家庭有二又二分之一個孩子。要舉類似的例子也不難，例如擲一個骰子多次後，你有辦法求出平均點數嗎？

這裏有幾個問題，來考驗你認識「算術平均數」、「中數」和「衆數」的程度：

1.假如某編輯要一張「典型的」家庭照，以「衆數」觀點來看，攝影師能找到這樣一個家庭嗎？（能，因爲典型的家庭當然存在。）

2.衆數可不可能不只一個？例如一個家庭有二個小孩和一個家庭有三個小孩都代表衆數？（可以。如果有個鎮，其中一千四百七十六戶家庭有兩個小孩，一千四百七十六戶家庭有三個小孩，而其他家庭的小孩數目有多有少。那麼鎮中就有兩種典型的家庭—都是衆數。）

3.假如編輯要一個符合「中數」的家庭照，是否一定找得到呢？（通常能，不過不是永遠能。就如前面所論，如果鎮中列出的家庭數目爲偶數，而居中的兩類家庭孩子人數又不同，那麼中數家庭的人數就可能不是整數了。）

驟下結論

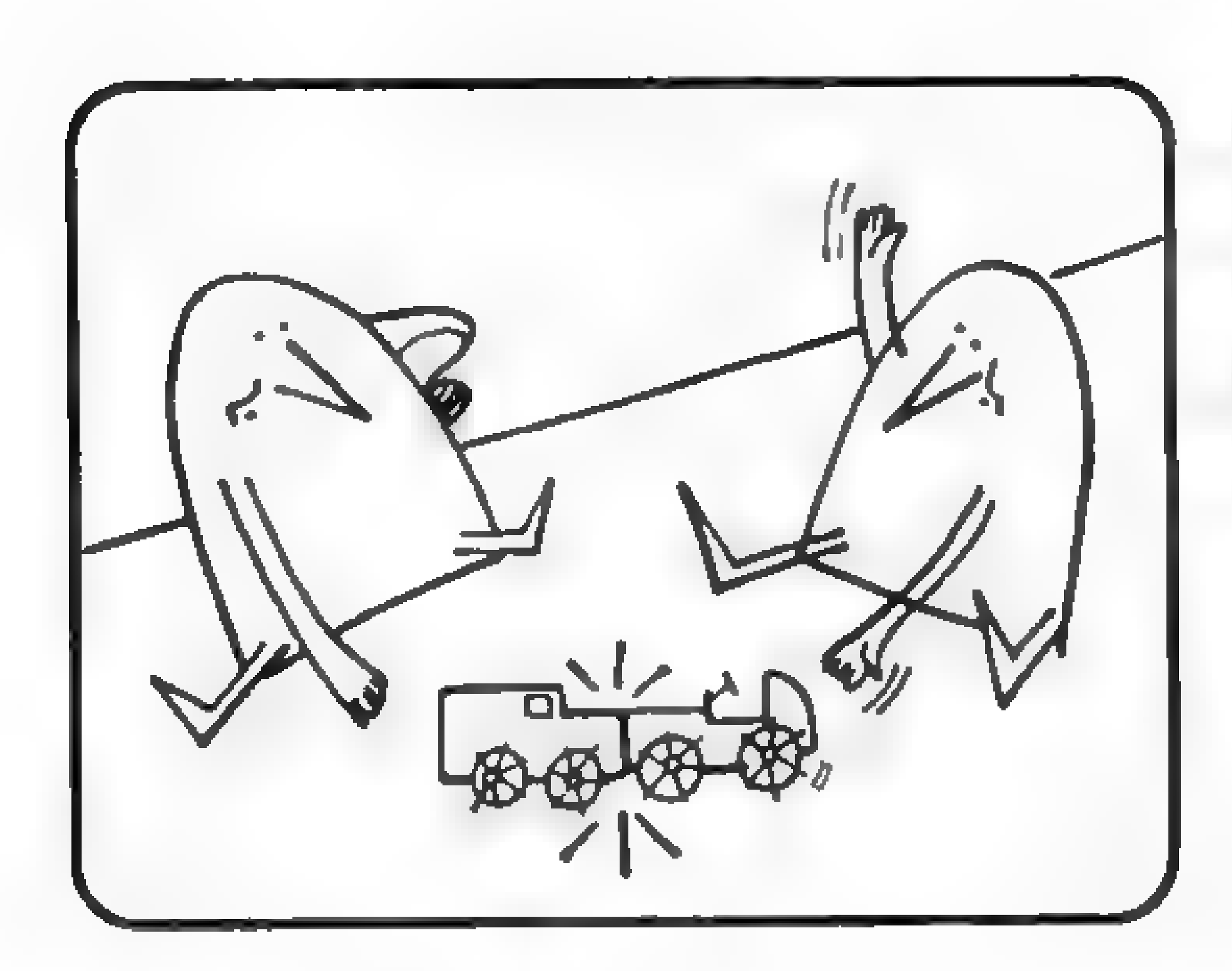


圖1：根據統計顯示，多數車禍發生在車子行駛於一般車速的時候；只有少數車禍發生在車超速過每小時一百五十公里的時候。這是否表示開快車比較安全呢？

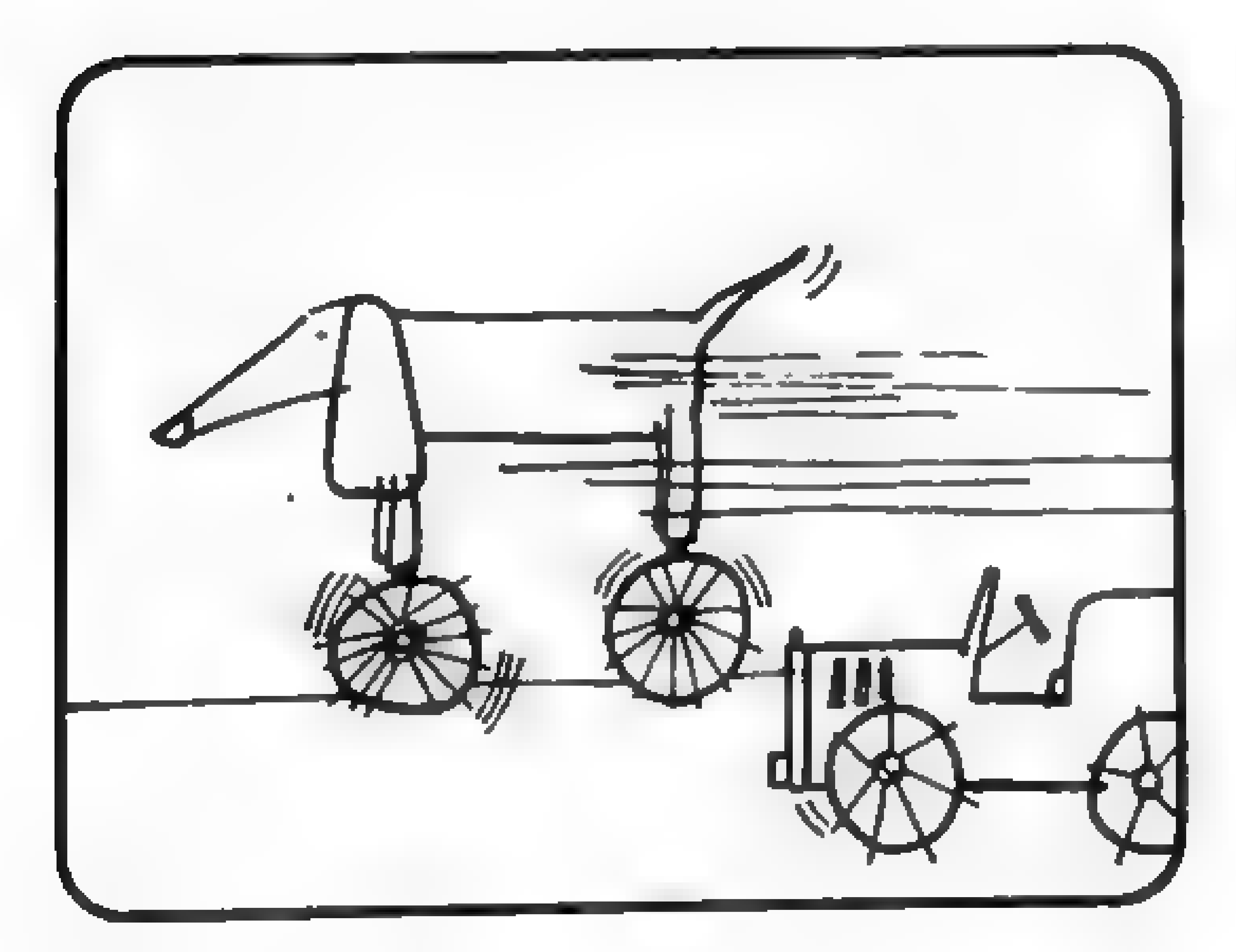


圖2：絕對不是。統計上的關係通常和因果是無關的，多數人都以一般車速開車，自然多數車禍發生於一般車速。

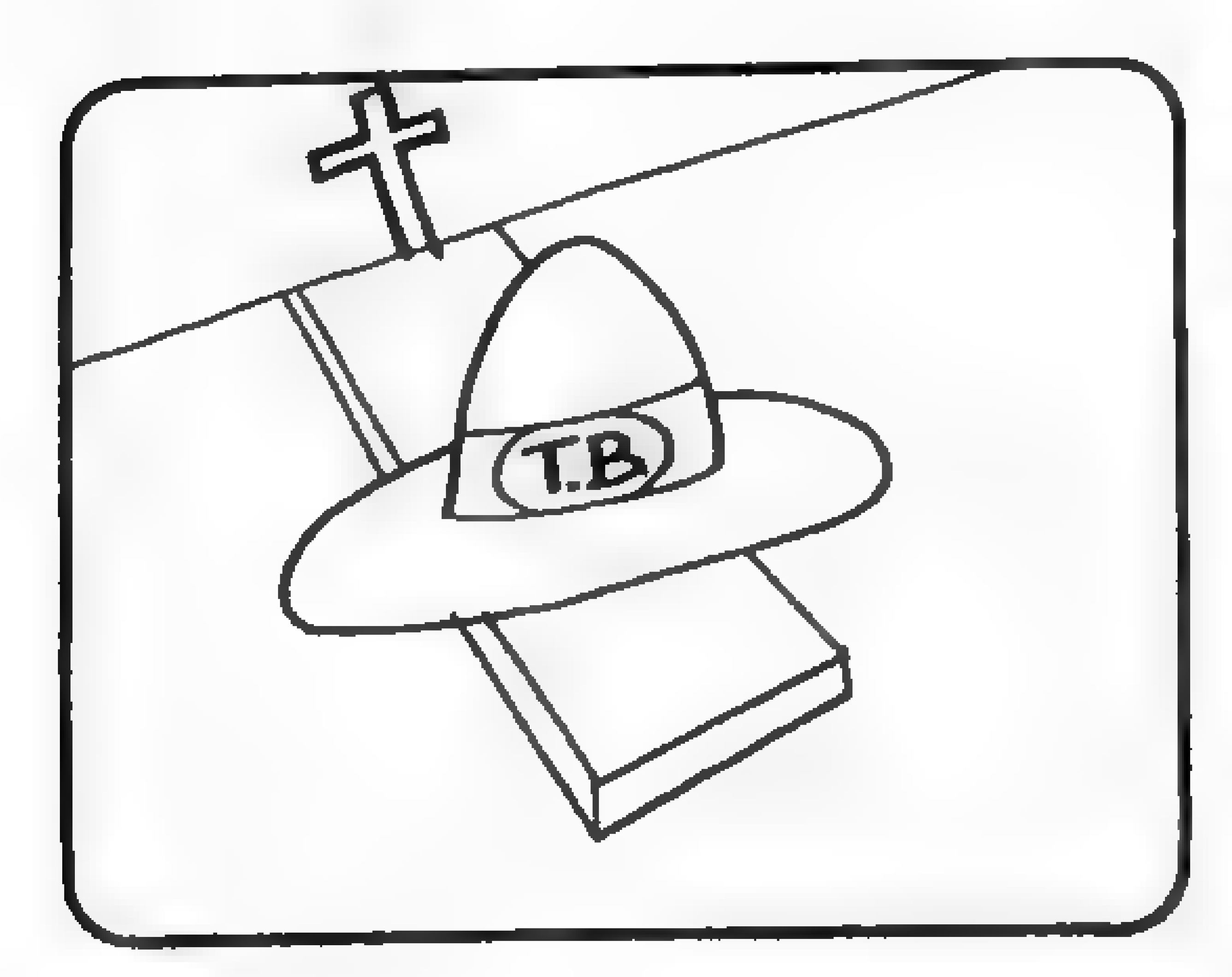


圖3：如果統計顯示在亞利桑那州有較多的人死於肺結核，這是否表示和別州比較起來，亞利桑那州的天氣較容易感染肺結核呢？

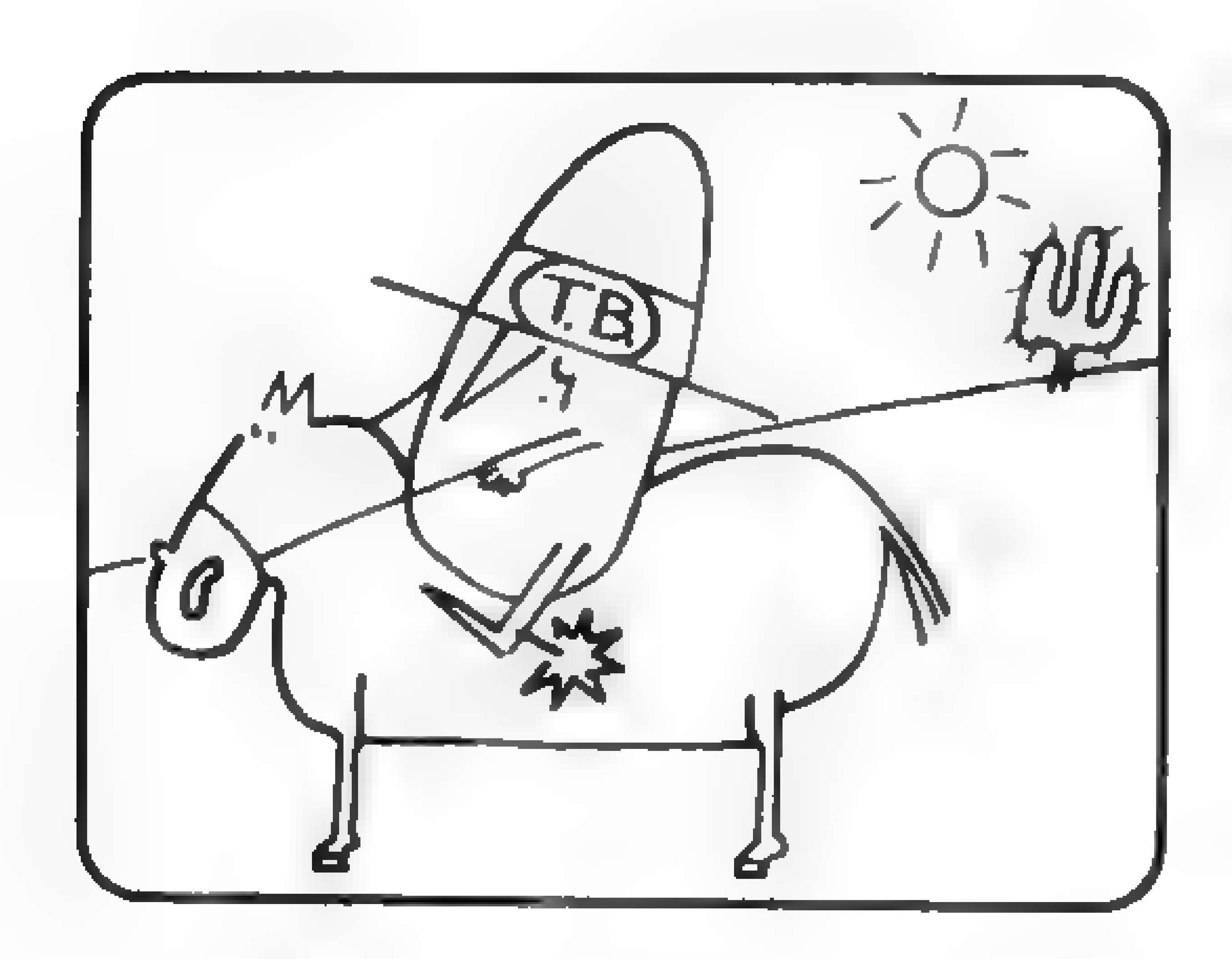


圖 4：剛好相反，正因爲亞利桑那的天氣有助於肺炎患者，所以有上千患者去那兒休養，自然就提高了死於肺炎的平均人數。

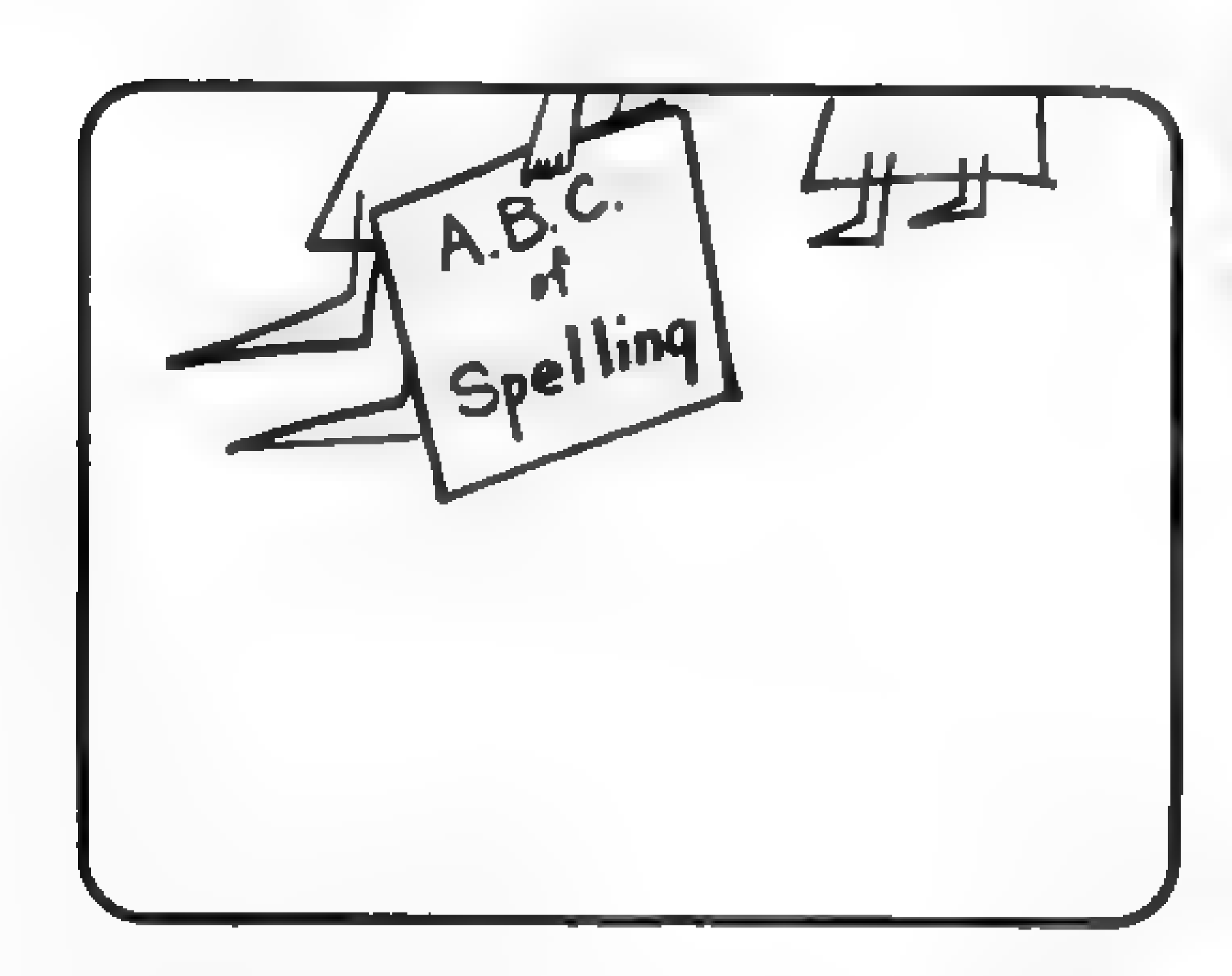


圖 5：有個調查研究顯示，腳比較大的兒童拚字能力也比較好。這是不是表示從一個人腳的大小，可以測量出他的拚字能力？

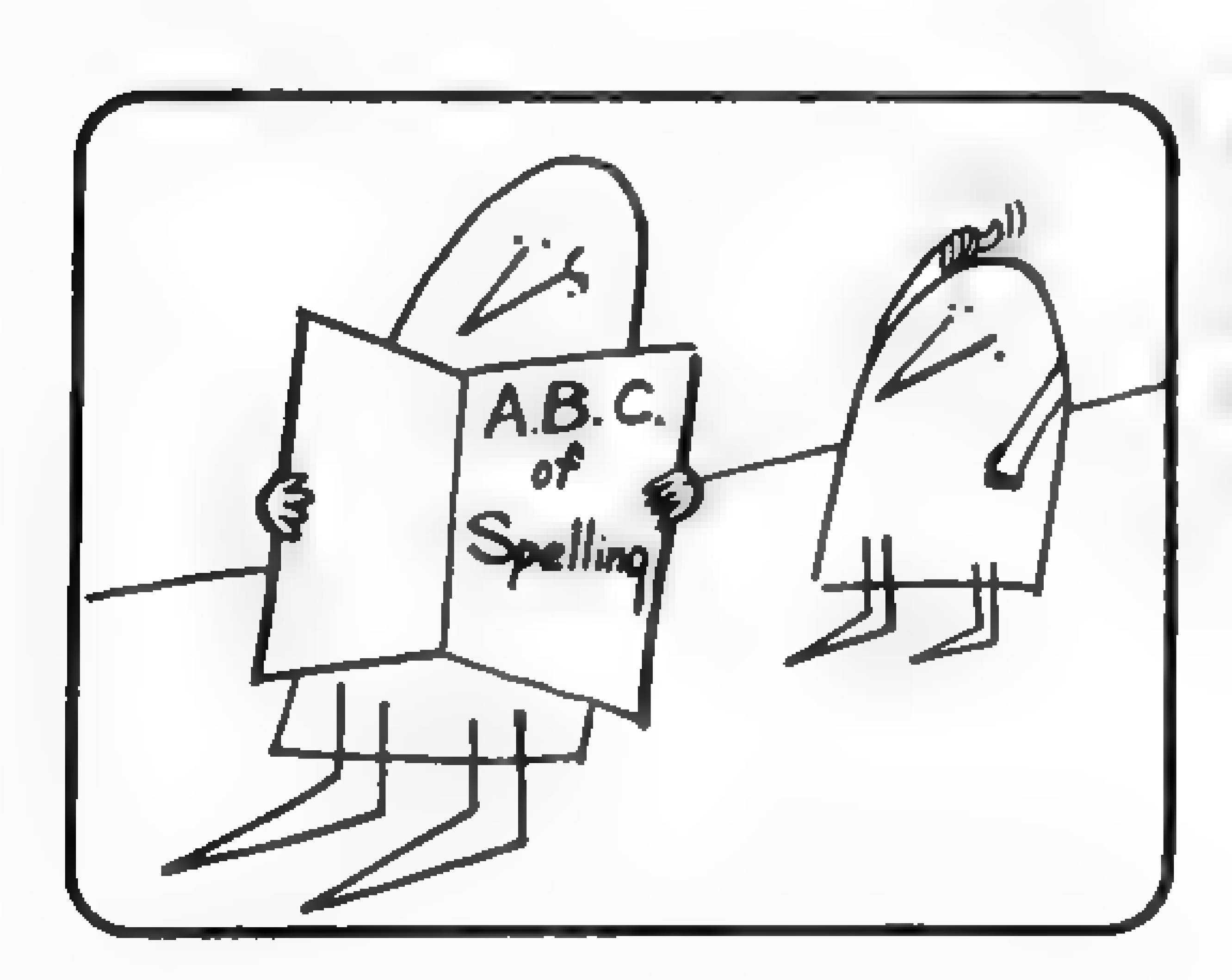


圖 6：當然不是。這個研究包括成長中的玩童，所以統計數字只是說明年齡較大的兒童（他們的腳當然也比較大）比年齡較小的兒童，拚字拚得比較好。

這些故事強調當你聽到統計數字時，不要對因果亂下結論。下面還有些例子：

1.據說多數車禍發生在住家附近。這是否表示在離家很遠的高速公路開車，比在市區開車安全？不是，這個統計只反映一件事實：車子多半行駛於車主的住家附近，而不是遙遠的高速公路上。

2.有個研究顯示，某一州喝牛奶的人口比例和得癌症的人口比例都很高，這是否表示喝牛奶會造成癌症？不是！而是這州的老年人口比例也高，由於癌症通常是老年人的不幸，所以才提高了癌症死亡人口的比例。

3.研究顯示，有個城市死於心臟衰竭的人數和啤酒的消費量同時遽增。是不是因爲喝啤酒增加了心臟病的機率？不是，這兩類數字的增加是因爲人口快速成長的結果。用同樣的推理，心臟病也可能是其他幾百種原因造成的：喝咖啡、嚼口香糖、玩橋牌、看電視等數量的增加等等。

4.研究顯示，某個歐洲城市人口大量增加的同時，送子鳥（白鸛鳥）鳥巢的數目也大量增加，這是否支持送子鳥帶來寶寶的說法？非也，這只是反映以下的事實：

由於建築物的數目隨著人口增加而增多，因此送子鳥有更多地方可以築巢。

5.最近有個研究顯示，偉大的數學家多半是長子（譯註：指第一個出生的兒子，意即有姊姊仍算是長子）。這是否意味長子比後頭生的兒子，有更佳的數學能力？不是，這只反映出一個驚人的事實──多數的兒子是長子。

上面的例子建議你作些有趣的實驗，調查你的男性朋友，看看是否半數以上是長子；同樣調查你的女性朋友，看看多少比例是長女。或是作個思考上的實驗，假設有一百個家庭，每家各有兩個孩子，那麼男孩（或女孩）爲長子（或長女）的比例是多少？答案是四分之三。算算看如果每家有三個孩子，比例會是多少？（答案是十二分之七）。更別說只有一個孩子的家庭了，那個孩子一定是最年長的。長子或長女的準確比例，會隨家庭人口的多寡而變。可是就所有人口來算，比例是超過一半的。

這些例子或許會讓你想找出其他的例子，來看看統計數字是多麼容易誤導出不當的因果關係。現在的廣告，特別是電視廣告，常可見到許多這類錯誤的報導。

小世界的矛盾

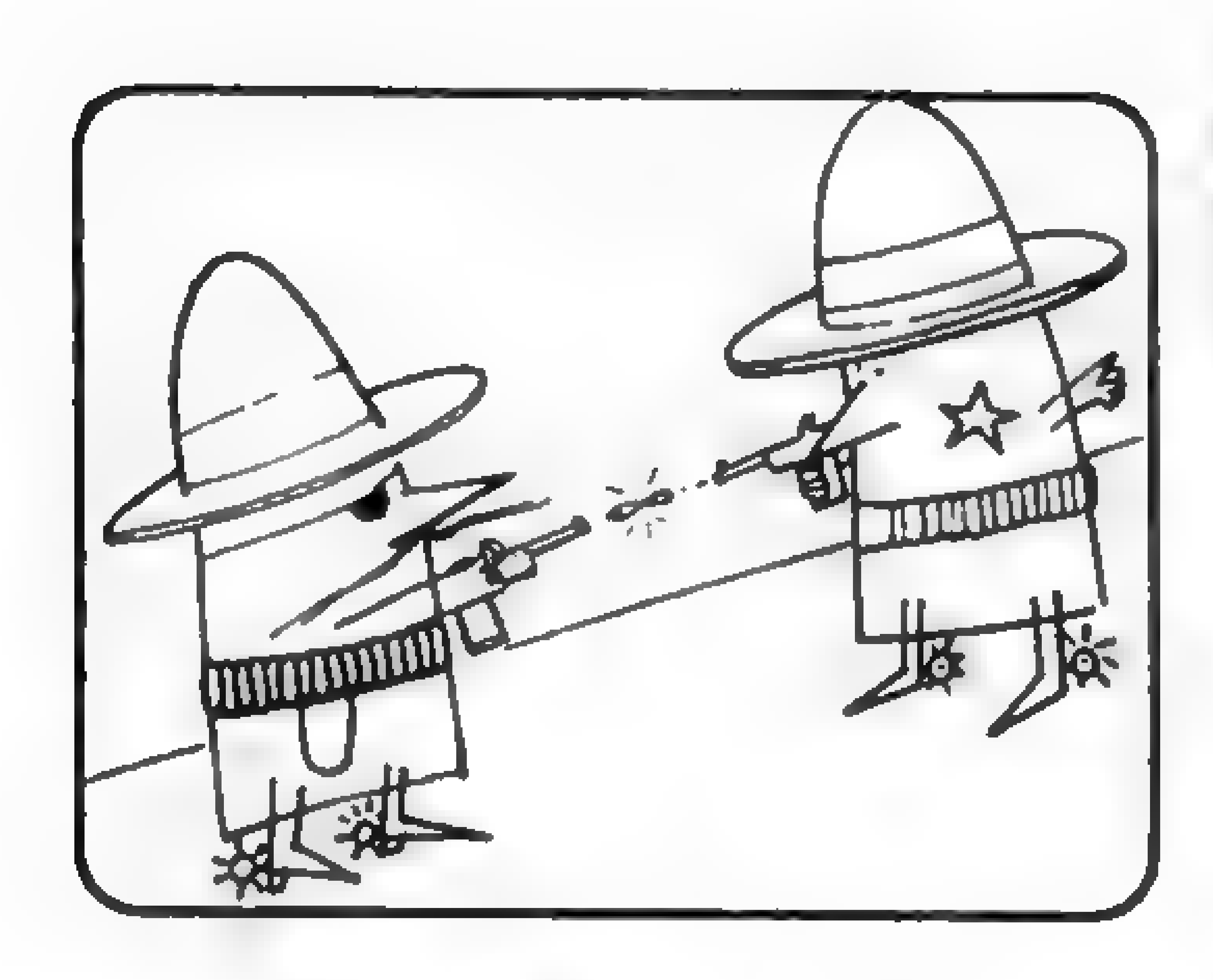


圖1：現在很多人都認爲巧合是因爲星宿或一些玄妙的力量所引起的。

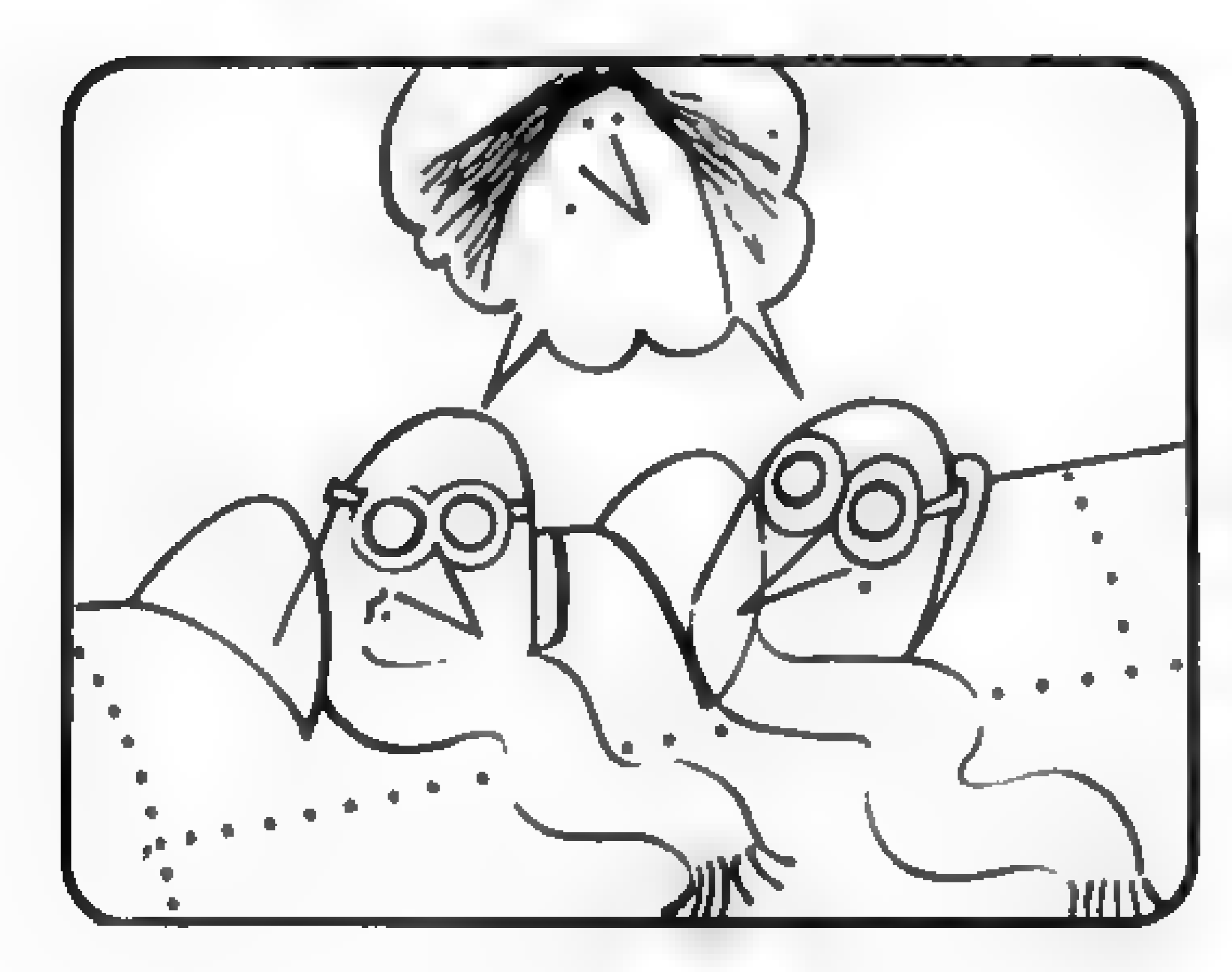


圖2：舉例來說，如果有兩個陌生人在飛機上相遇。
吉姆：「你是從波士頓來的！我有個老朋友露西在那兒當律師呢。」
湯姆：「這眞是個小世界！她是我太太最要好的朋友哩！」
這類事件看起來似乎不太像巧合？統計學家證明了這不是巧合。

當我們遇到一位陌生人，特別是在離家很遠時，發現彼此有位共同的朋友，多數人都會非常訝異。麻省理工學院索拉波(Ithiel de Sola Pool)所率領的一羣社會科學家，作了一個「小世界的矛盾」的研究。他們發現在美國隨機選出兩個人，平均說來，每個人差不多認得一千人，所以雖然這兩人彼此認識的機率是十萬分之一；可是他們共同認識一位朋友的機率，會遽升至百分之一；而他們經過兩個中間人認識的機率（像圖中飛機上的對談一樣），事實上比百分之九十九還高！換句話說，如果在美國任意選兩個人─布朗和史密斯，那麼幾乎可以確定布朗的某位朋友的朋友，認識史密斯。

心理學家密格蘭(Stanley Milgram)爲了研究這個問題，隨機選出一羣「源起者」(starting persons)，交給每位一份文件，然後要傳遞到一位在很遠一州的「目標者」(target person)手上（源起者並不認識目標者。）源起者把文件寄給一位最有可能認識目標者的朋友，那位朋友再寄給另一位朋友……直到最後到達一位認識目標者的朋友手上。密格蘭發現在文件傳到目標者之前，所經過的中間人數目，從

二到十位不等，中間數是五。而隨便問一個人大約必須經過多少中間人才能送達這份文件，多數猜約一百位。

密格蘭的研究說明了人們彼此的朋友，相互間形成了一個多麼緊密的網路。所以兩個陌生人，在離家很遠的地方碰到，而互相有認識的朋友，這並不值得大驚小怪。這樣的網路也解釋了其他不是一般的統計現象，像閒話、譁衆取寵的新聞、秘密情報、和笑話等傳播的速度。

你是哪個星座的？

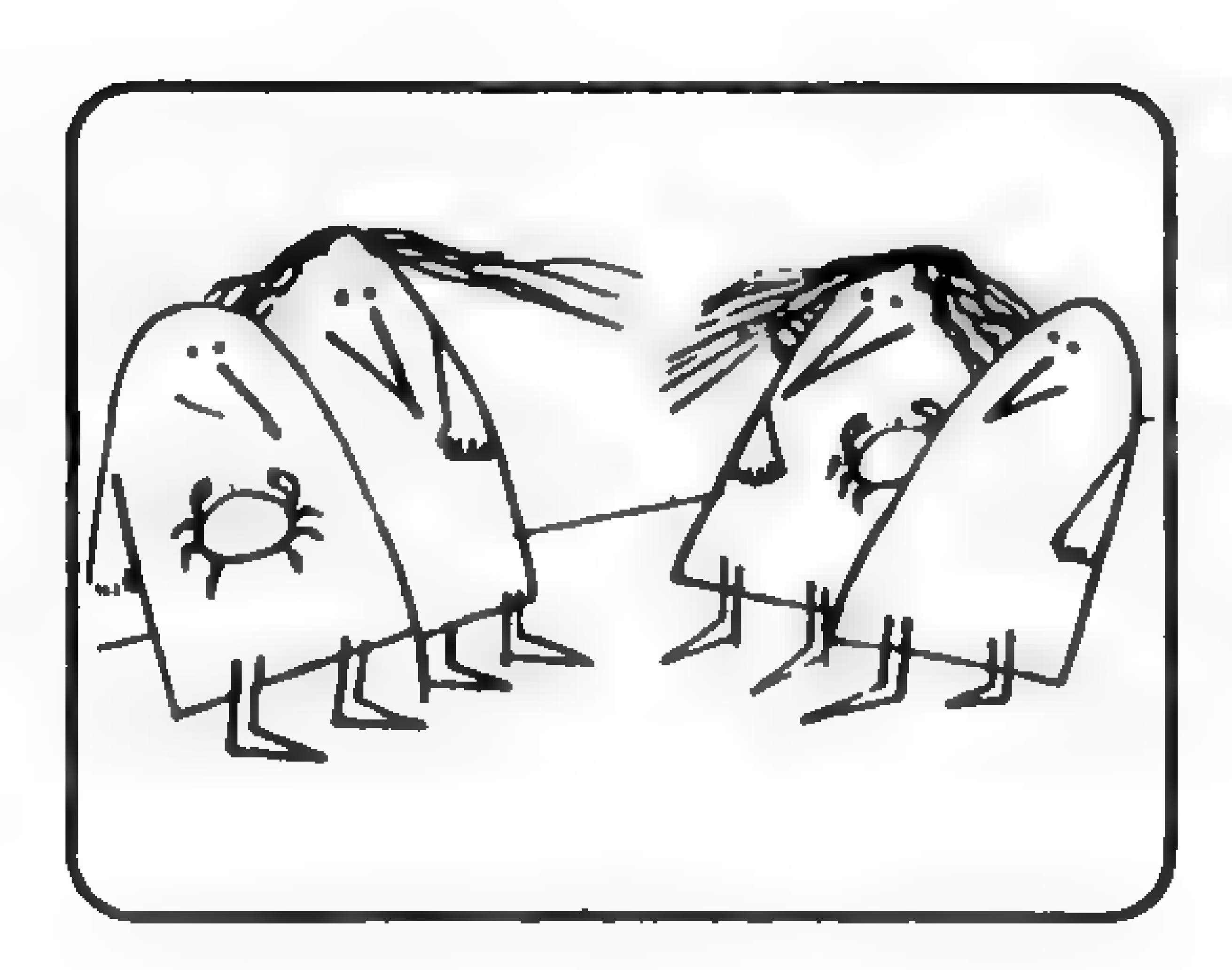


圖1：這四個人首次見面，如果其中至少有兩人是同一個星座，是不是太巧了？

你或許也覺得很巧，但是實際上十次中有四次會發生這樣的情形。假設這四個人都出生在十二個星座中的一個，那麼四人中至少有兩人星座相同的機率是多少？

讓我們用一副牌作模型來解答這個問題。把牌中所有的K都抽掉，那麼這副牌的四種花色都只剩十二張牌，以一種花色代表一個人，每張牌代表一個星座，如果我們從每種花色中隨機選出一張牌，那麼至少有兩張牌牌點相同的機率是多少？這個情形和四位陌生人中至少有兩位是相同星座的情形一樣。

解決這個問題最簡單的方法是，計算出沒有兩張牌牌點是相同的機率，再用一減去，就可以得到我們所要找的答案。

如果我們先用紅心和黑桃來計算，選出兩張牌不相同的機率是十二分之十一，因爲一張紅心和一張黑桃相同的機率是十二分之一；再選出一張黑花，和前面兩張牌點不同的機率是十二分之十，而最後一張紅磚和已抽出的三張牌牌點不同的機率是十二分之九。把這三個分數相乘，我們可以得到這四張牌都不同的機率是九十六分之五十五。用一來減，得到九十六分之四十一，即四人中至少有人是相同星座的

機率，差不多是十分之四，接近二分之一，所以這樣的巧合實在不足爲怪。

這是著名的「生日矛盾」的另一種說法。如果隨便有二十三個人碰面，其中至少有兩人是同月同日生的機率是略高於二分之一！計算的過程和前面一樣，只是有二十二個分數要相乘：

$$\frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\frac{361}{365}\times\cdots\cdots\times\frac{343}{365}$$

把一減去這個乘積，得到的數字約大於二分之一，只要用個小型計算機就可證實這個數字。如果人數超過二十三人，同一天生日的機率會急遽提高。在三十個人中，至少有兩位同天生日的機率差不多是十分之七。在一百人中，比例甚至高過三百萬比一。

你也許會想到一些問題：

1.有多少美國總統是同一天生日？有多少位是同一天去世？眞正的答案和理論

上的預期值相去多少？

2.最少要有多少人碰在一塊兒，其中兩個人同月生的機率才會大於二分之一？(答案是：五人，機率是一百四十四分之八十九，約零點六二)。

3.最少要有多少人碰在一塊兒，其中兩人在一星期中的同一天(例如星期三)生日的機率會大於二分之一？(答案：四人，機率是三百四十三分之二百二十三，約零點六五)。

4.最少要有多少人碰在一塊兒，其中至少有一人和你同天生日的機率會大於二分之一？(答案：二百五十三人，而非一百八十三，如果每個人都不同天生日，答案才是一百八十三人。)

英雄與太陽



圖1：這個人把每個月的第一個英文字母寫下來，J代表一月(January)，F代表二月(February)等等。出現「JASON」(希臘的一位英雄，尋得金羊毛)這個名字是否很巧?

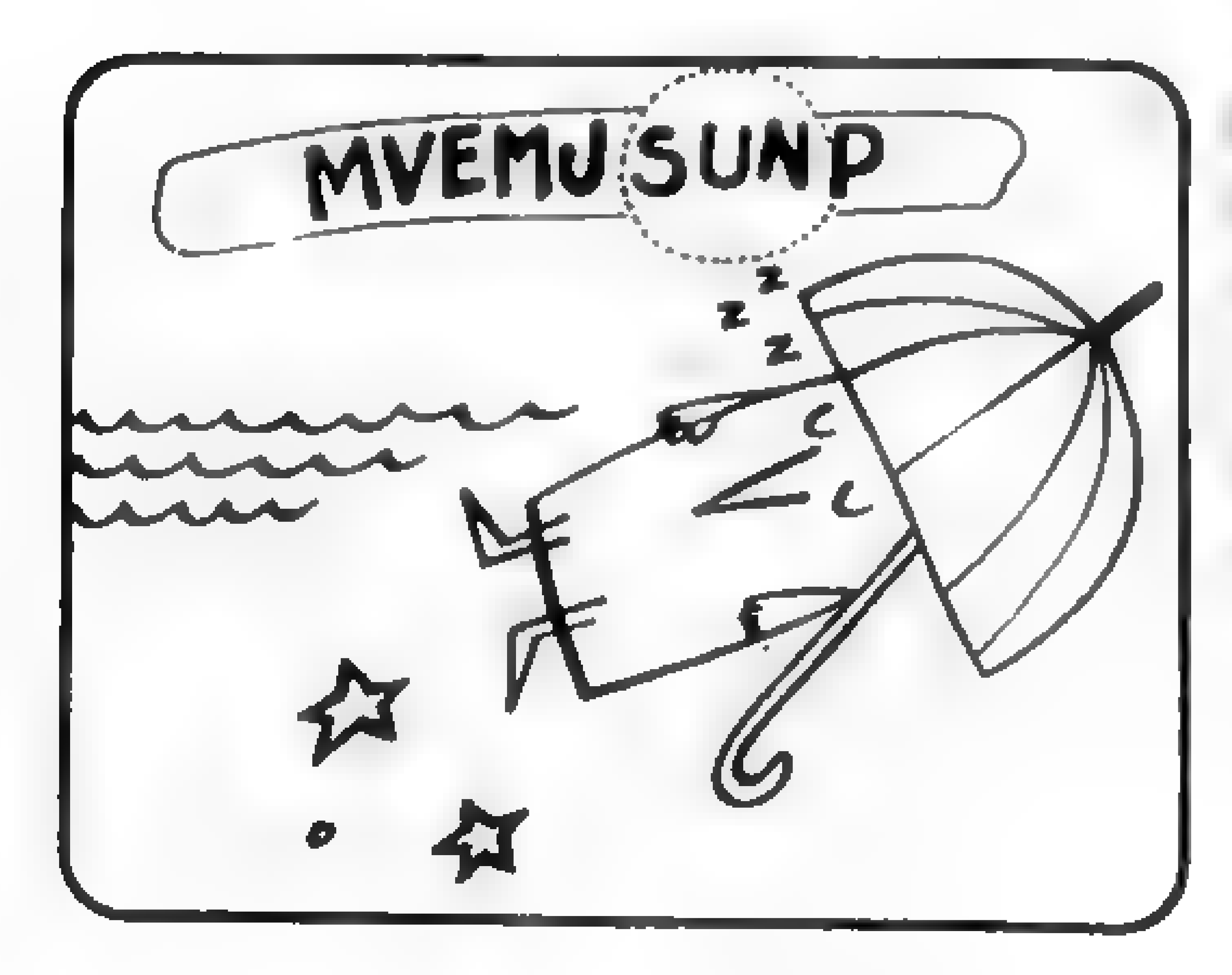


圖2：圖中的字母是九個行星的第一個字母，根據距離太陽的遠近而排列，M代表水星(Mercury)，V代表金星(Venus)等，出現「SUN」(太陽)這個字，是否很巧?

這兩個有趣的巧合更說明了亞里斯多德說的「不可能的事是絕對有可能發生的」(The improbable is extremely probable)。另外有一種方式可以用來說明「不可能的事發生的機率」這個說法──用一個可以隨機選出字母的轉盤。我們先找一個三個字母組成的字，然後要在轉一百次內，連著轉出三個字母剛好組成這個字──可能性不高；可是如果要連著轉出三個字母，而且組成一個可以在字典中查到的字，那就非常有可能了。

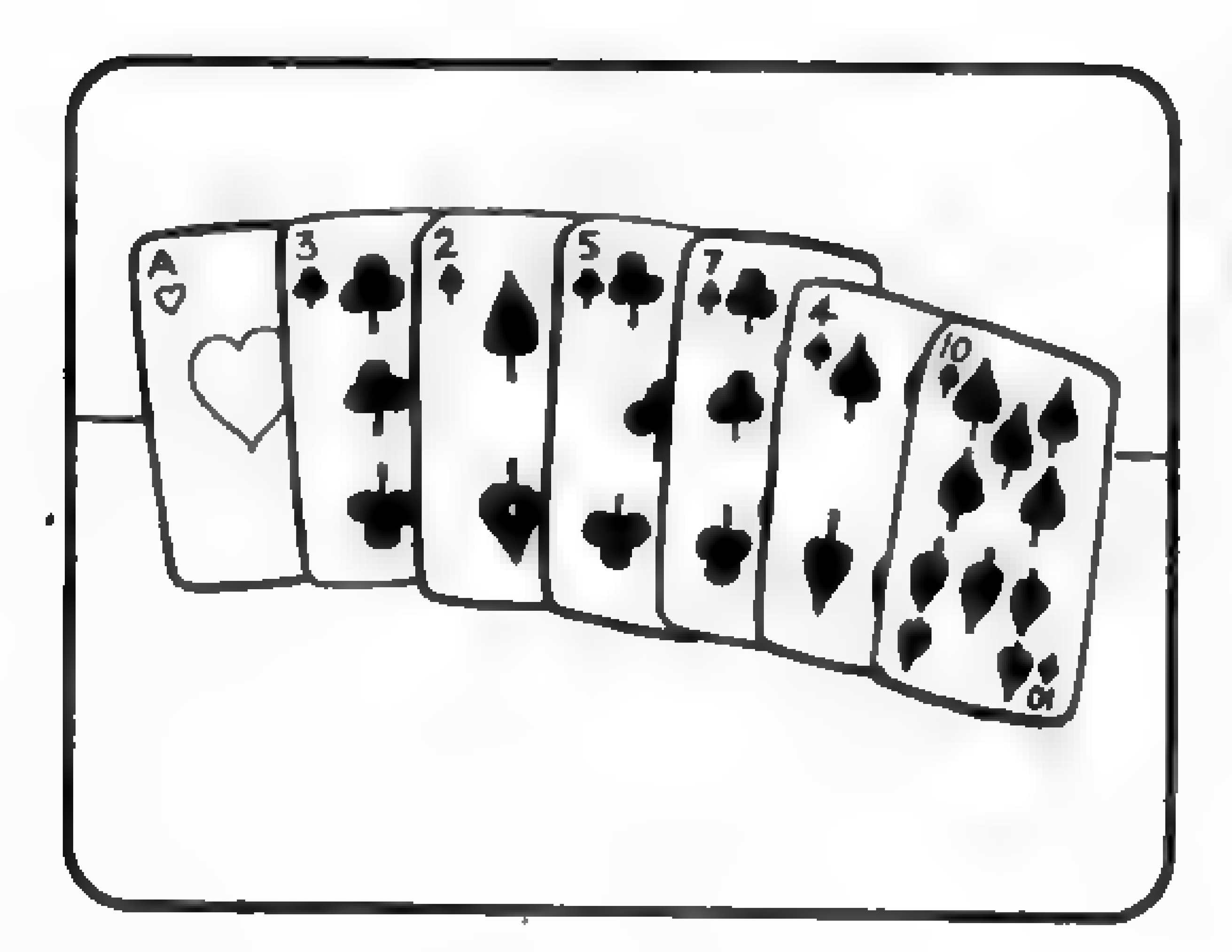
你可以用這個輪盤試試看，把每次轉出的字母寫下來，看看連著轉出的三個字母組成一個有意義的字，需費時多久。再試試看四個字母和五個字母，你會驚訝出現有意義的字有多頻繁。

而一個字出現時，往往會讓你聯想到你身邊的事，例如「Eva」(伊娃) 很可能是你認識的人的名字；「hat」(帽子) 可能會讓你想到某位掉了帽子的朋友。注意一些組合像IBM、FBI (美國聯邦調查局)、USA；一些縮寫像Dec (十二月)、Fri (星期五)。把這些字和事件聯在一起，你很容易就明白，爲什麼有些人會認爲一

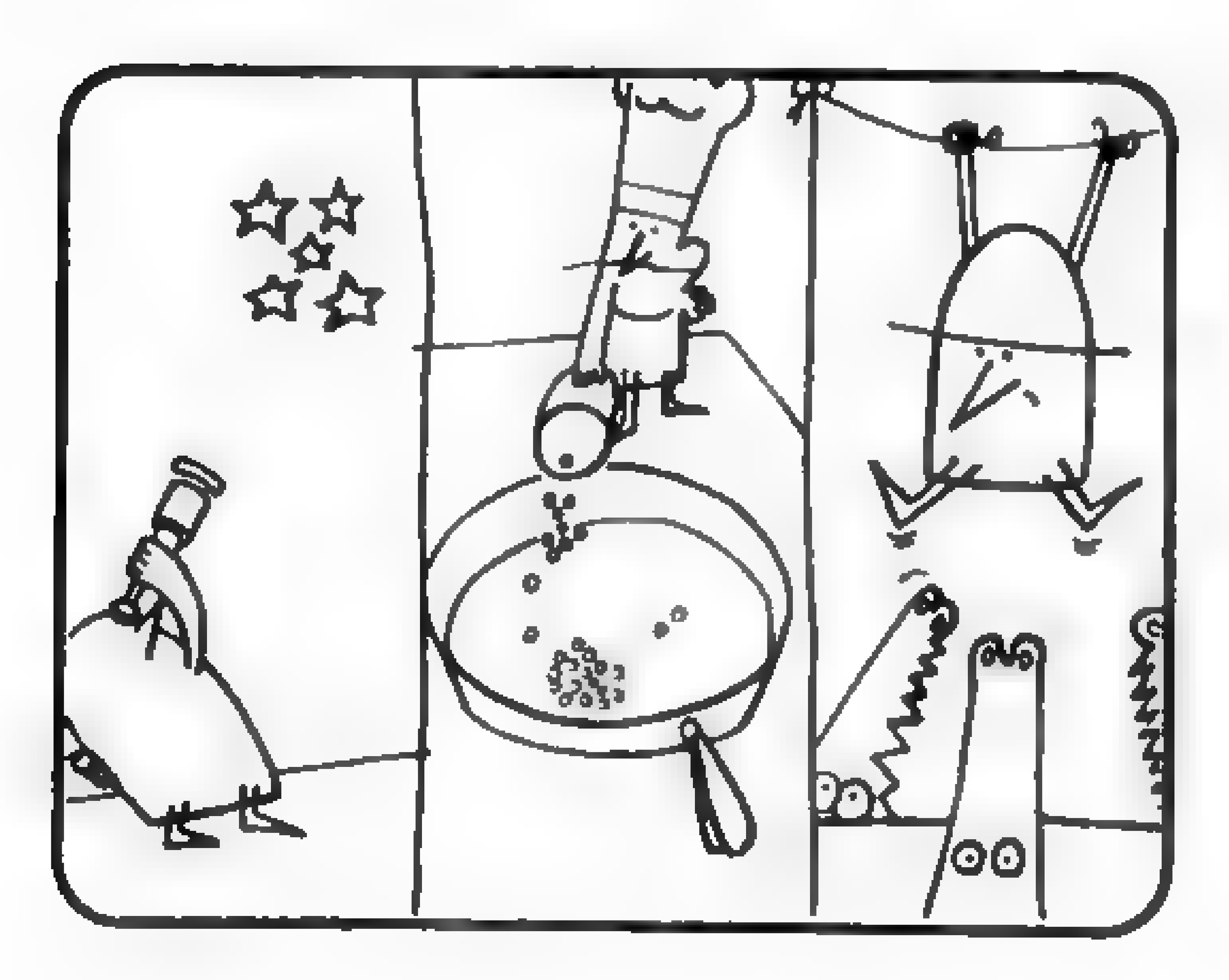
定是有超自然的力量在運作，才會轉出這些字。

這個實驗解釋了爲什麼人的一生中會出現許多驚人的巧合，巧合發生時，我們很容易就相信是由一種冥冥中的力量所造成的。對統計學者而言，這類的巧合是非常可能出現的，在每天發生的一大堆事情中，有上百萬種方式會出現某類巧合。由於事先並未區分會出現那類巧合，就好比並未指明在 π 的小數點後會出現什麼排列方式的數字；或是前面所說的隨意轉出的字母會組成什麼字。當巧合發生時，看起來總不像是會偶然發生的，可是我們別忘了，在一個巧合出現時，卻有其他上百萬個可能發生卻未實現的巧合。

瘋狂大集合



1. 甚至在一堆洗過的牌中都含著巧合，譬如幾乎總有連續六、七張牌是相同顏色的。



2. 聚集成群的星星稱爲星座。把豆子扔到平底鍋內容易形成一堆堆的。有句老話：「禍不單行」。

隨機事件常以不同方式「成羣出現」，是個衆所周知的現象，而有好多書是整個都在討論有關於統計學家所講的「樹叢理論」(Clumping Theory)。在 π 的小數中出現七個3是隨機成羣的例子。如果你一直擲銅板或轉輪盤，把轉到的顏色和數字記下來，你會驚訝的發現，類似的例子出現得有多頻繁。

有個關於成羣出現的著名實驗，是由摩爾(A. D. Moore)所發現，他是位密西根大學(University of Michigan)的工程師。摩爾把實驗叫做「極品鑲嵌」(nonpareil mosaic)，因爲他大量使用一種叫「極品」(nonpareil)的糖菓，一種小小的有顏色的球狀糖菓。把相同數量的紅色和綠色糖菓裝在一個玻璃瓶內，然後搖晃瓶子，直到兩種顏色完全混合。

現在看看瓶子的表面，你以爲會看到均勻混合的顏色，其實不然，你所看到的是不規則的大片紅色綴著大塊綠色所形成的美麗鑲嵌。這樣的情形實在出人意表，甚至數學家們第一次看到這情形，都以爲是某種靜電效果讓相同顏色的糖菓聚在一起，事實上原因無他，純屬偶然。這樣的鑲嵌只是隨機成羣的正常結果。

如果你難以相信上面所言，試試這個簡單的實驗：在一張紙上畫四百個正方格子（二十乘以二十），每格方塊內以擲銅板來決定塗上紅色或綠色。當這四百格方塊的顏色都塗滿時，你會看到和前述裝滿糖菓的瓶子一樣顏色的鑲嵌。

在「成羣出現」的事件中，通常有非數學因素（nonmathematical factors）介入。如果高速公路上的車子以任意的速度行駛，從直昇機上看下來，車子都是一羣羣的。但是實際上車子之所以成羣，不能光解釋成偶然的機率，因爲駕駛多半不會超與自己車速差不多的車子；只有在前面一大段都沒車時，駕駛才會加速。另外像地圖上城鎮的地點、雨天的順序、草地上的雜草等等；以及許多其他的事情，都證明成羣出現的現象，不僅僅是偶然造成的。

投票矛盾

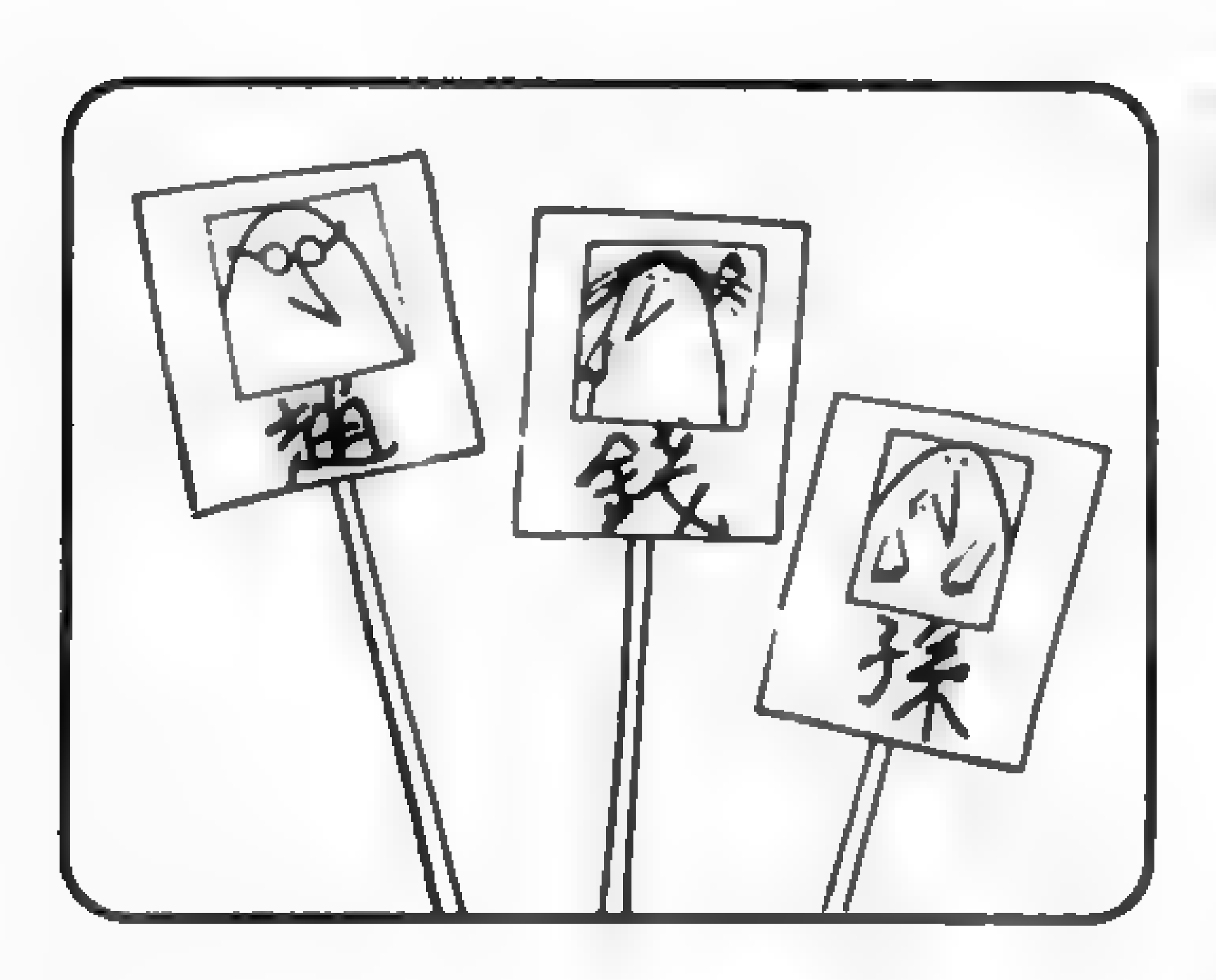


圖1. 假設有趙、錢、孫先生三人競選總統。

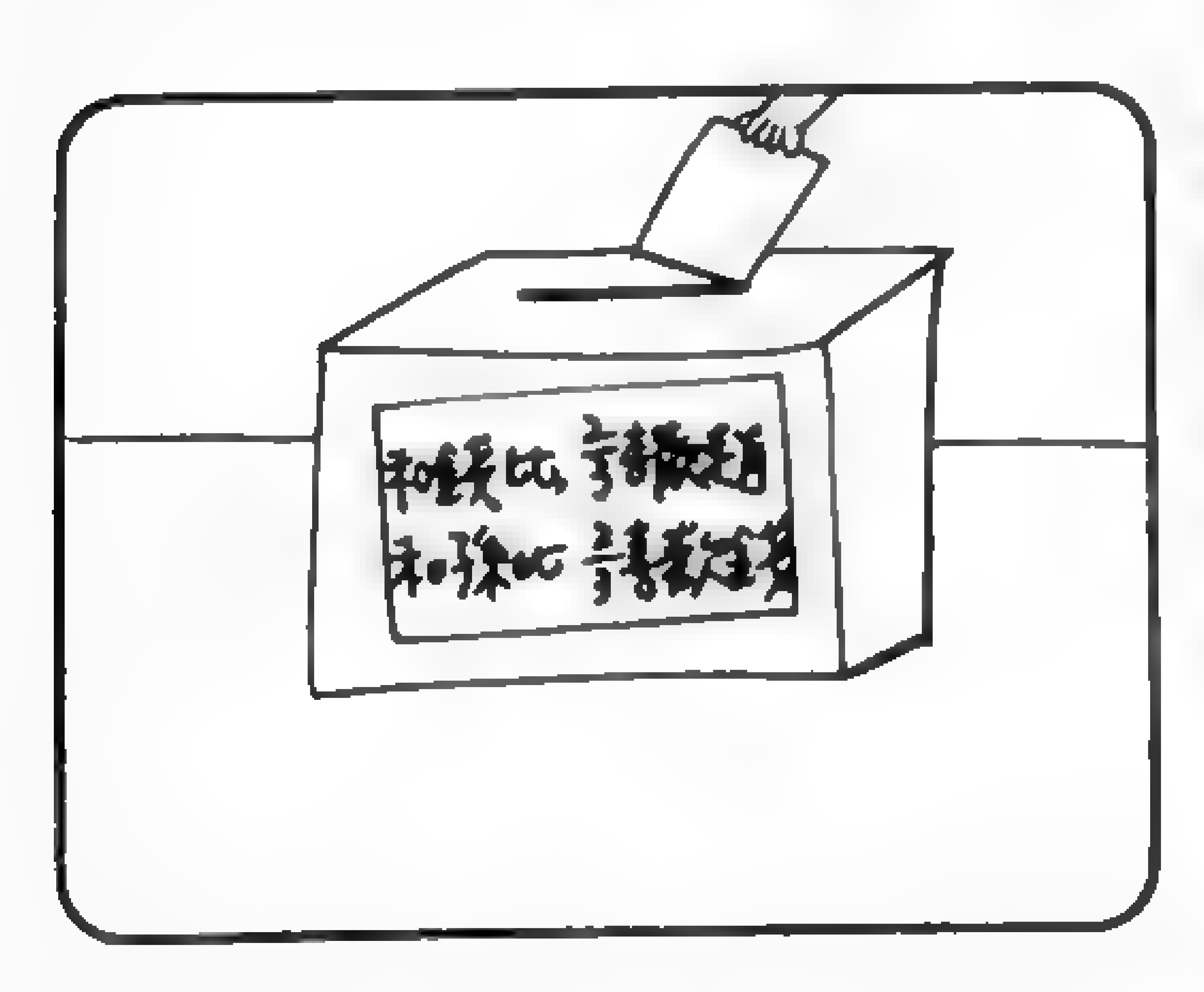


圖2. 民意測驗顯示，和錢先生比較起來，有三分之二的選民較喜歡趙先生；和孫先生比起來，有三分之二的選民較喜歡錢先生。那麼趙先生和錢先生比較起來，是否大多數的選民比較喜歡趙先生？

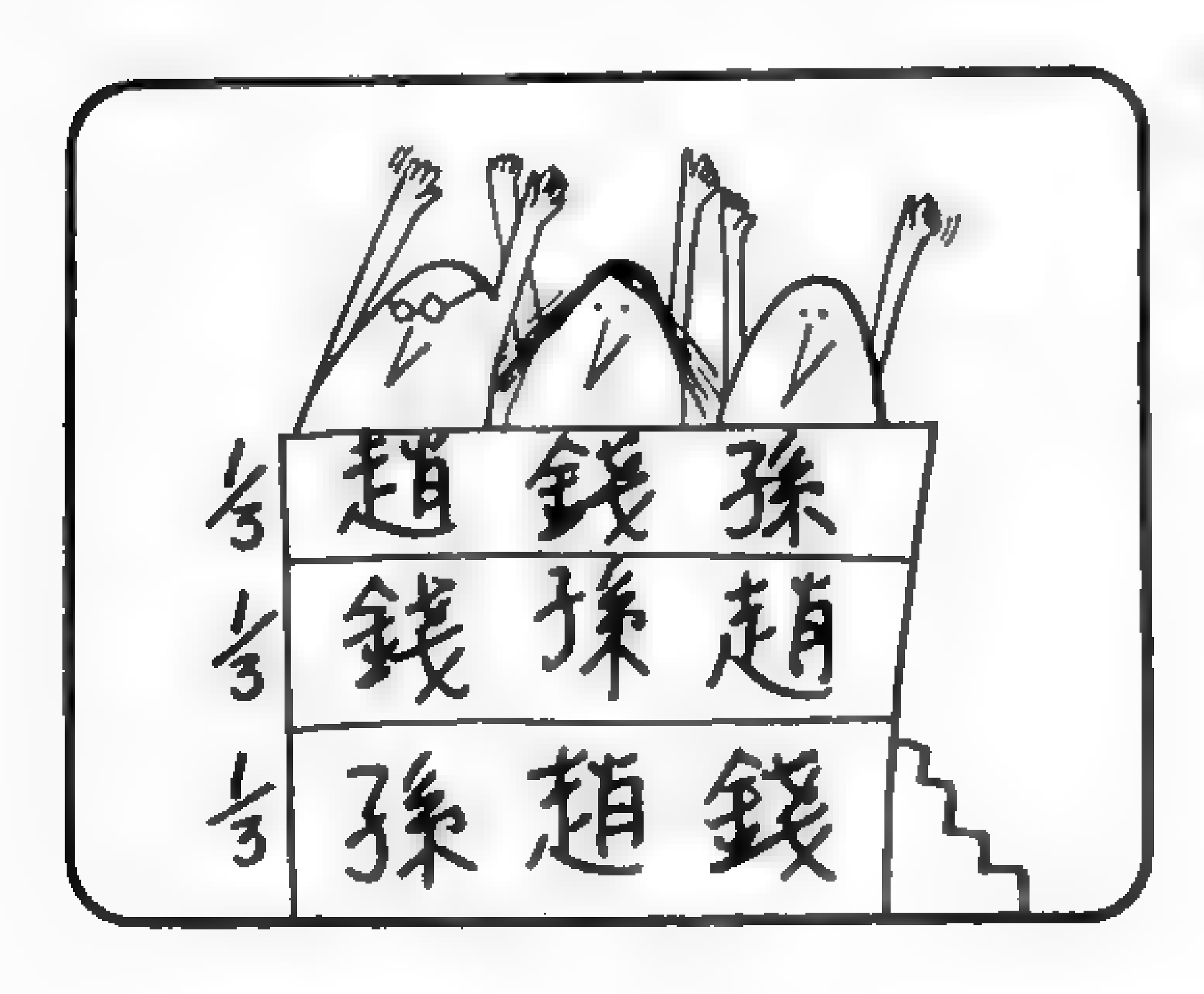


圖3. 並不盡然！如果把選民喜好候選人的程度排列起來，如圖所顯示，那麼就出現了令人訝異的矛盾。讓這三位候選人來解釋這個圖。

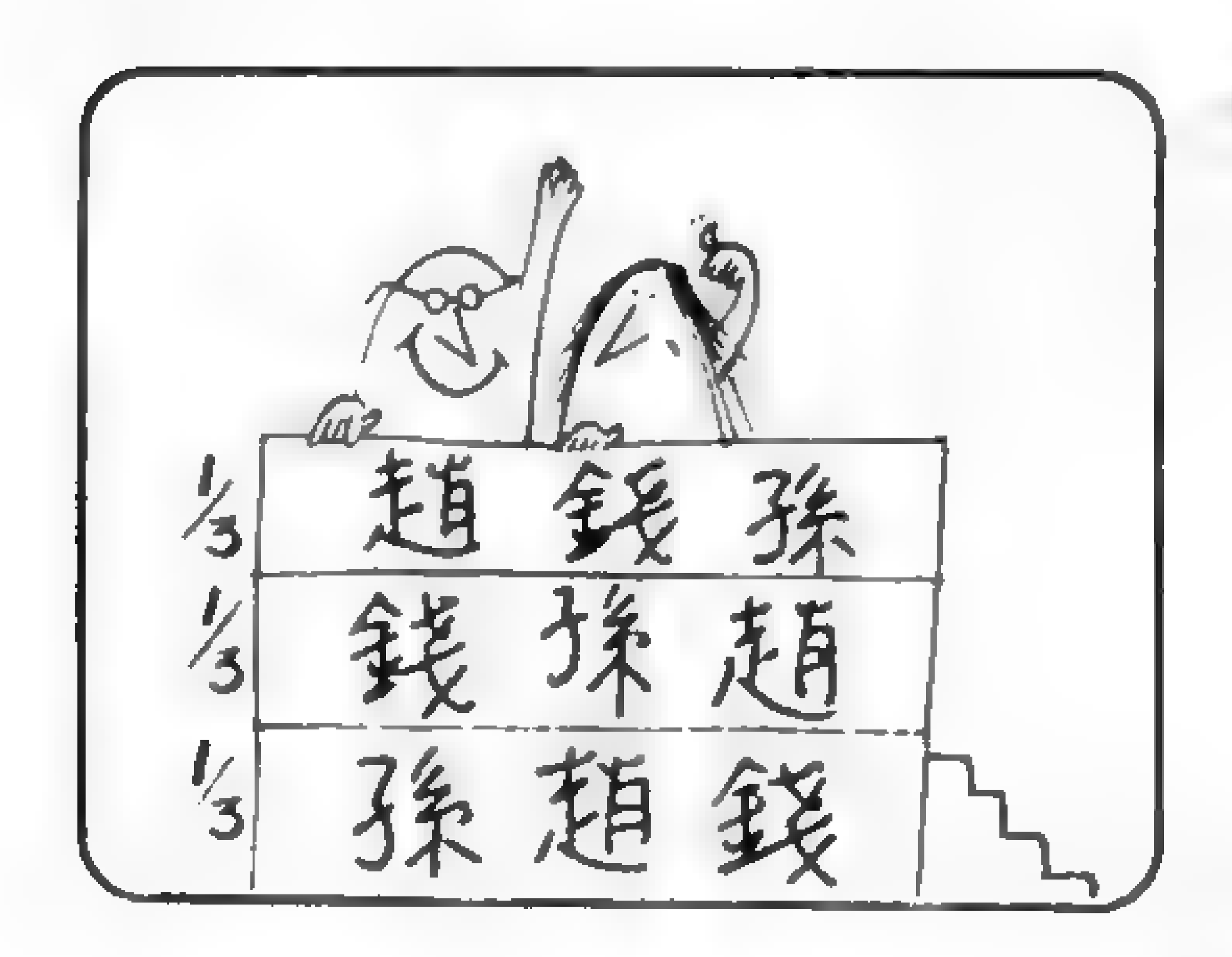


圖4. 趙先生：和錢先生比起來，三分之二的選民比較喜歡我。

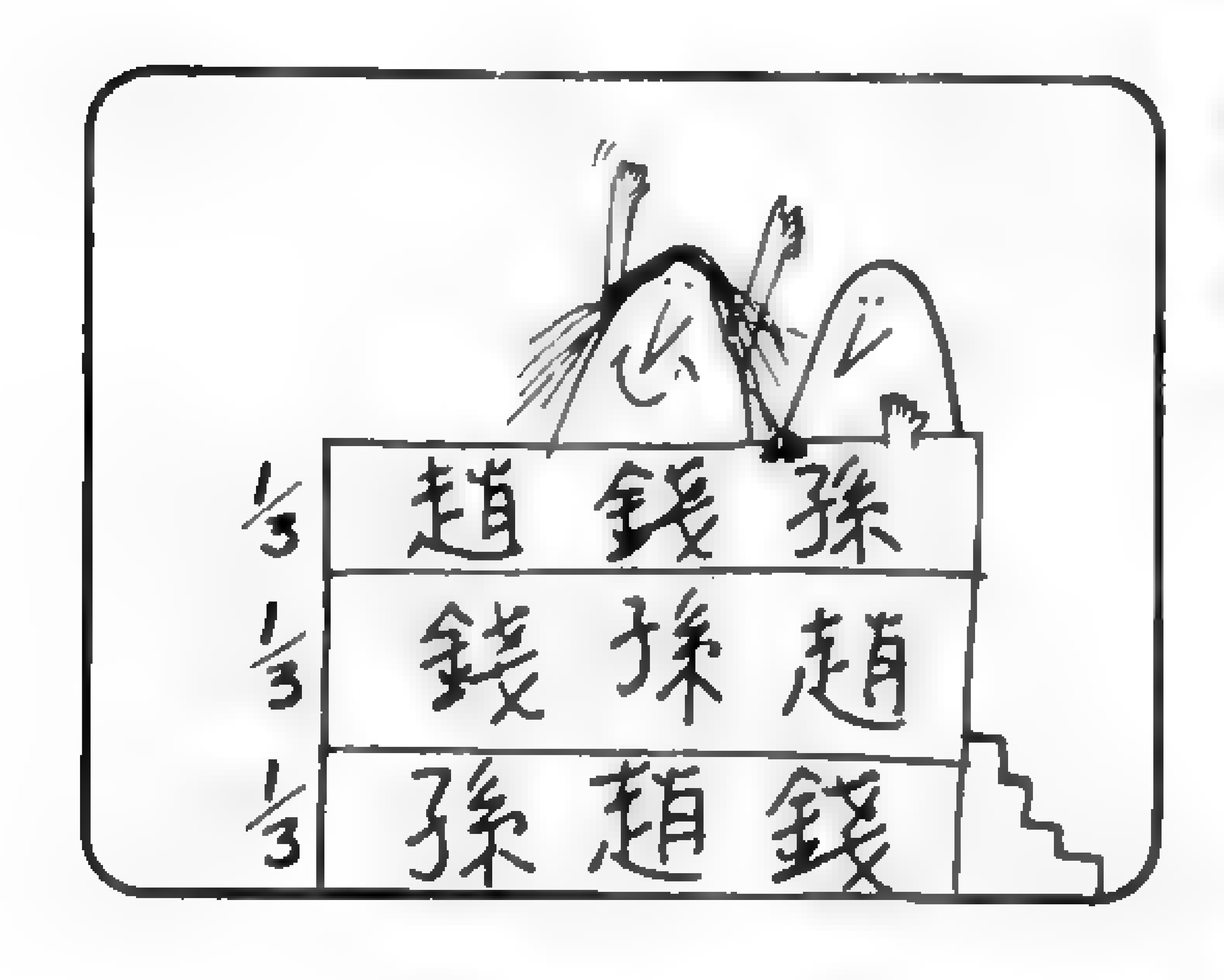


圖5. 錢先生：和孫先生比較起來，有三分之二的選民較喜歡我。

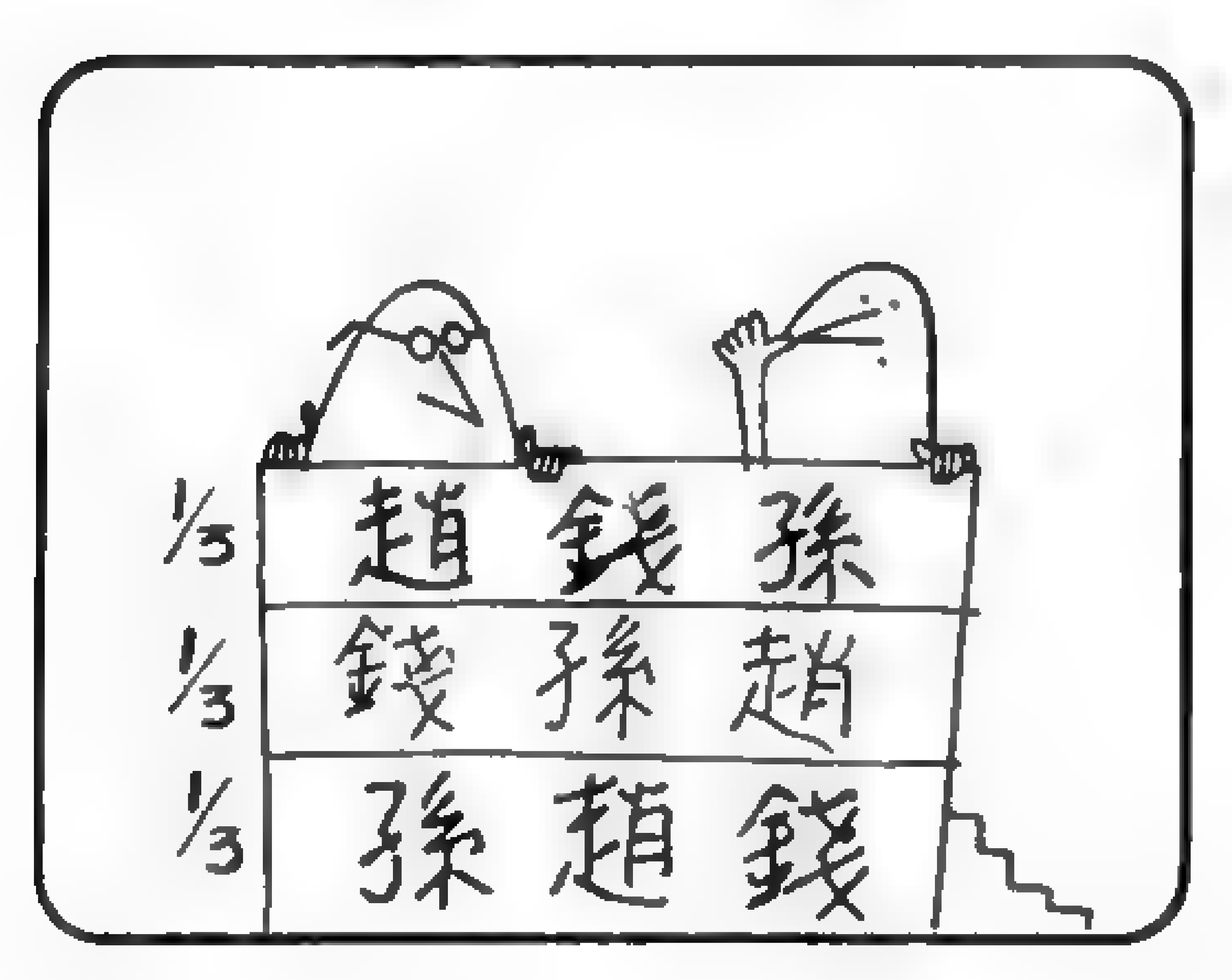


圖6. 孫先生：比起趙先生，有三分之二的選民較喜歡我。

這個矛盾可以追溯到十八世紀，是個說明非遞移性關係(nontransitive relation)的例子，這種關係會出現在兩兩成對的選擇中。而遞移性觀念則通常應用在「比較」的關係上，譬如「大於」、「高於」、「小於」或是「早於」、「重於」等。一般而言，如果有一種關係既符合A與B、B與C的關係，而且也適用於推到A與C的關係，這種關係就稱爲遞移性關係(transitive relation)，例如A大於B，B大於C，則A大於C)。

投票矛盾會出人意表，因爲我們通常預期的關係都是遞移性的。如果有人喜歡A多於B，喜歡B多於C，我們自然預期這個人會喜歡A多於C。事實上，並不盡然。像此矛盾中所指出的，大多數選民喜歡候選人趙先生多於錢先生；喜歡錢先生多於孫先生；喜歡孫先生多於趙先生；在這種情況下就是非遞移性的關係。有時這種矛盾也稱爲「亞羅矛盾」(Arrow paradox)，因爲諾貝爾經濟學獎得主亞羅(Kenneth J. Arrow)用這個矛盾和其他邏輯上的推論，說明完美的民主投票體系原則上是不可能的。

只要在三個選擇中，兩兩成對互相比較，而選擇其中之一，就會出現這種矛盾。假設有甲、乙、丙三位男士向同一位女士求婚，這位女士以三種特質─聰明、外表、收入來比較這三位男士，畫出一個矩陣。把每項特質以兩兩成對相比，這位女士會發現，她喜歡甲的聰明甚於乙，乙的外表甚於丙，丙的收入甚於甲！

芳心寂寞小姐

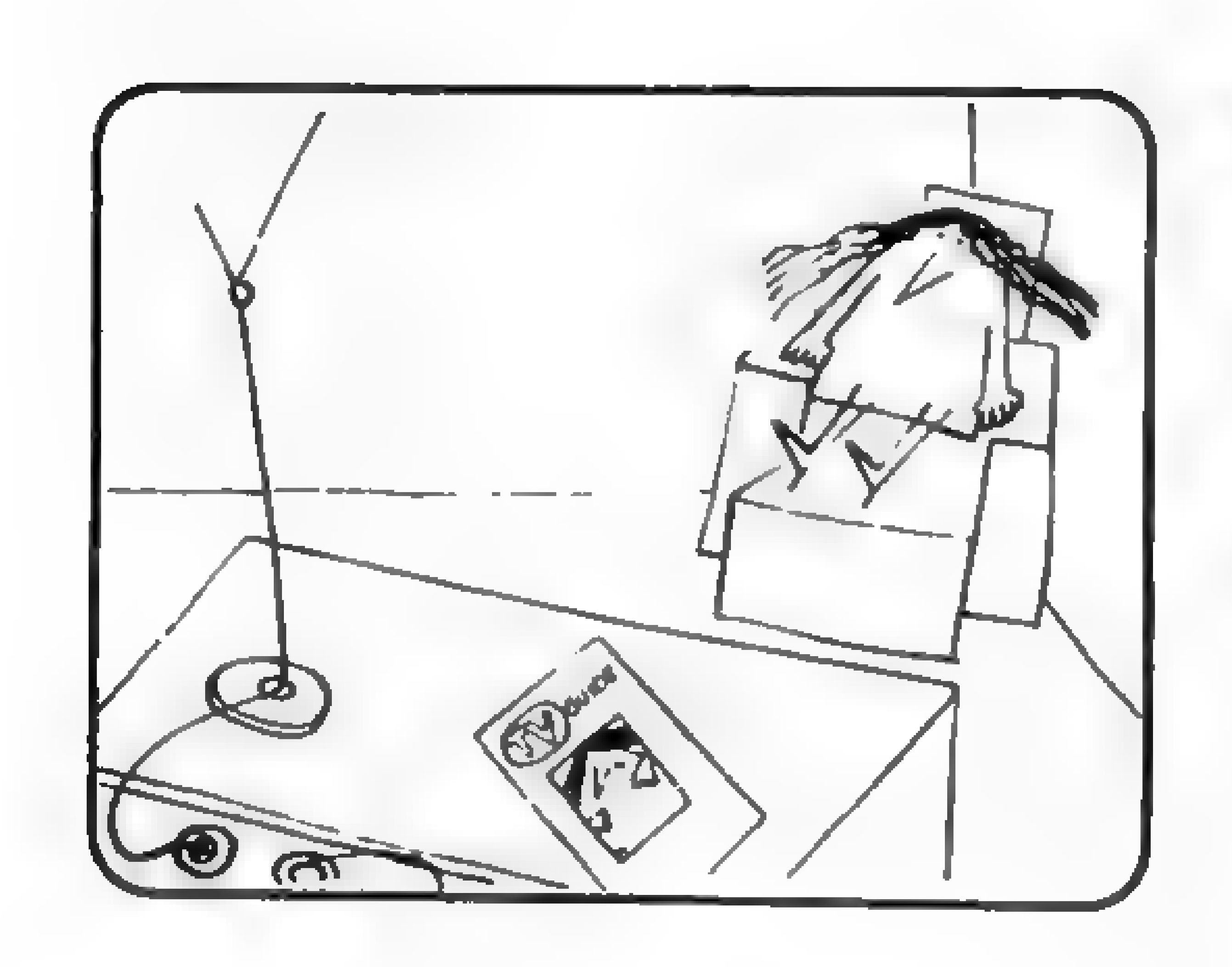


圖1. 芳心寂寞小姐是位統計學家，她再也受不了老是一個人待在家裏。
芳小姐：我眞希望能認識一些未婚男子，我想加入單身貴族俱樂部。

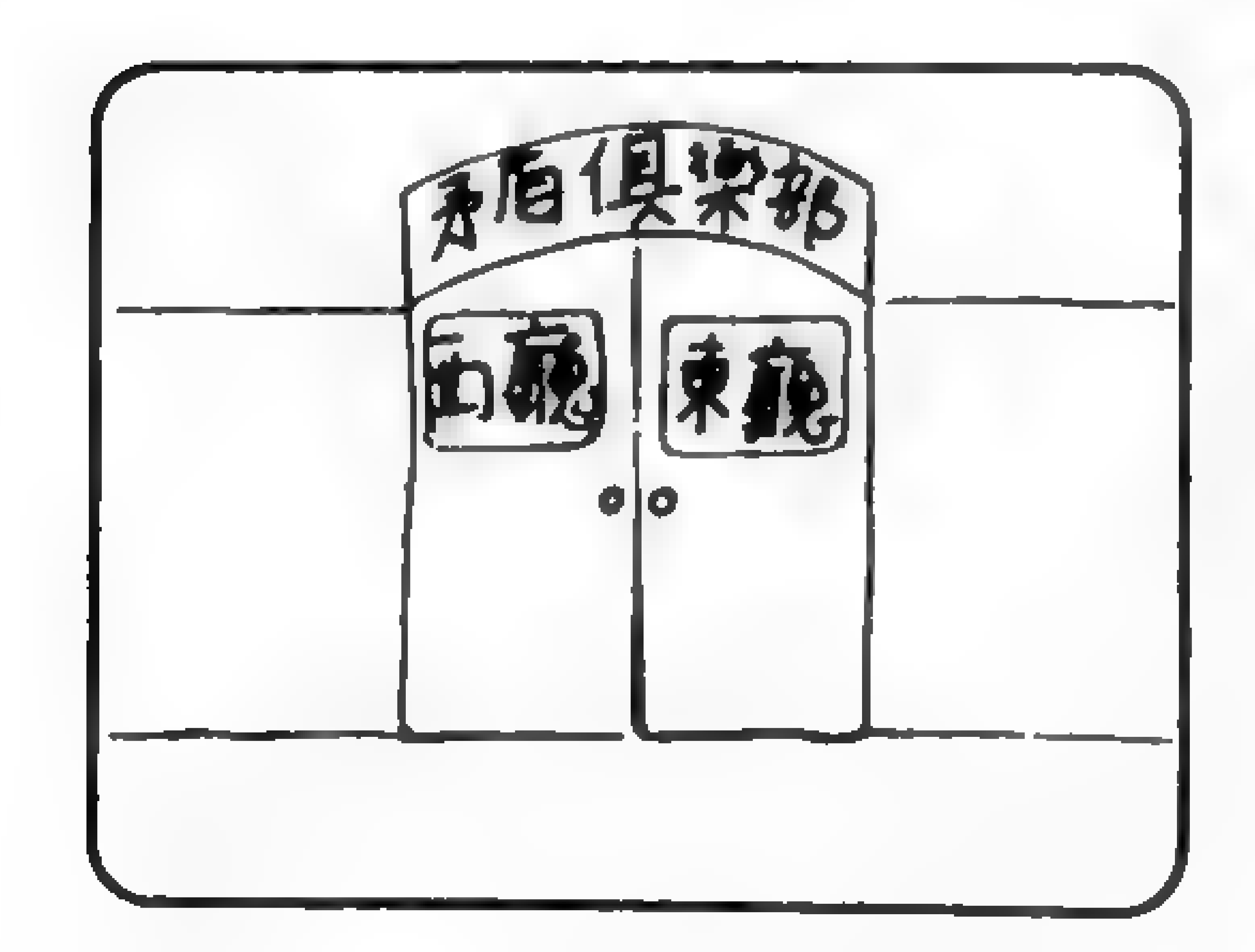


圖2. 芳小姐加入了兩個類似的團體，有天晚上，兩個團體同時在「矛盾俱樂部」舉行舞會，一個在東廳舉行，一個在西廳。

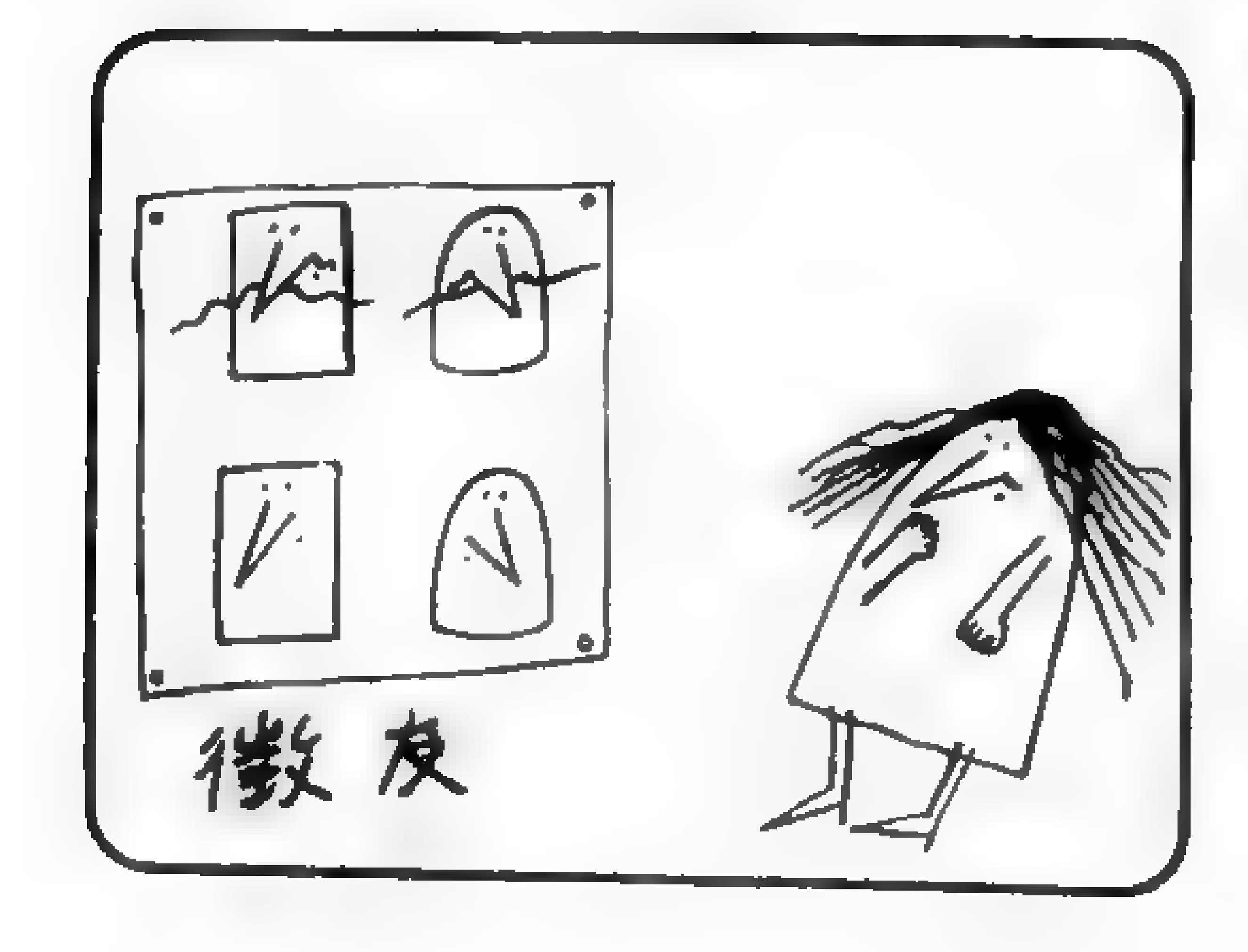


圖3. 芳小姐：有些男人有鬍鬚，有些沒有；有些男子很花心（圖中以圓頭表示），有些很正派（以方頭表示）。

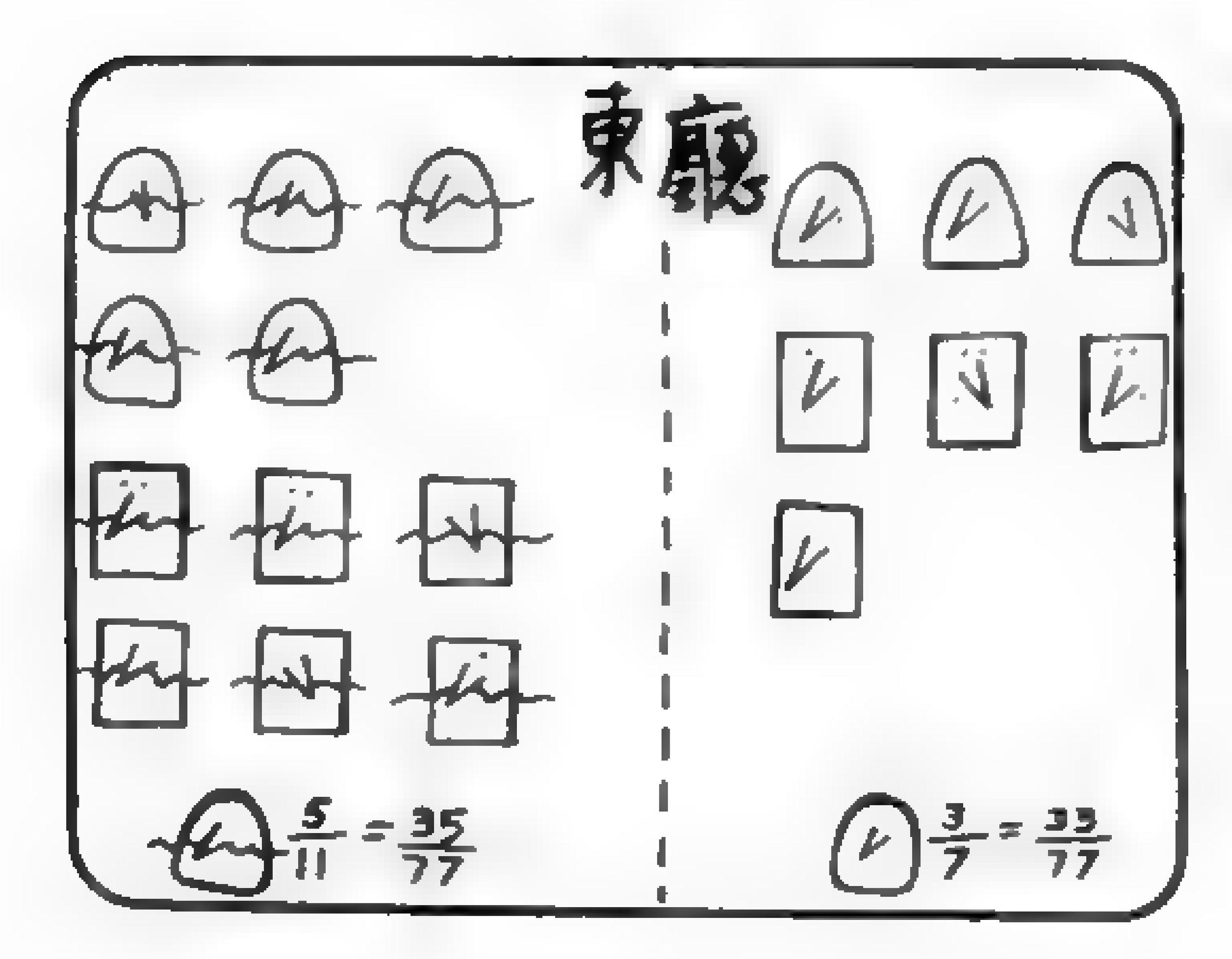


圖4. 芳小姐對東廳男子作了個統計研究—有鬍鬚的男子中花心的佔了十一分之五，即七十七分之三十五；鬍子刮乾淨的花心男子，佔七分之三，即七十七分之三十三。

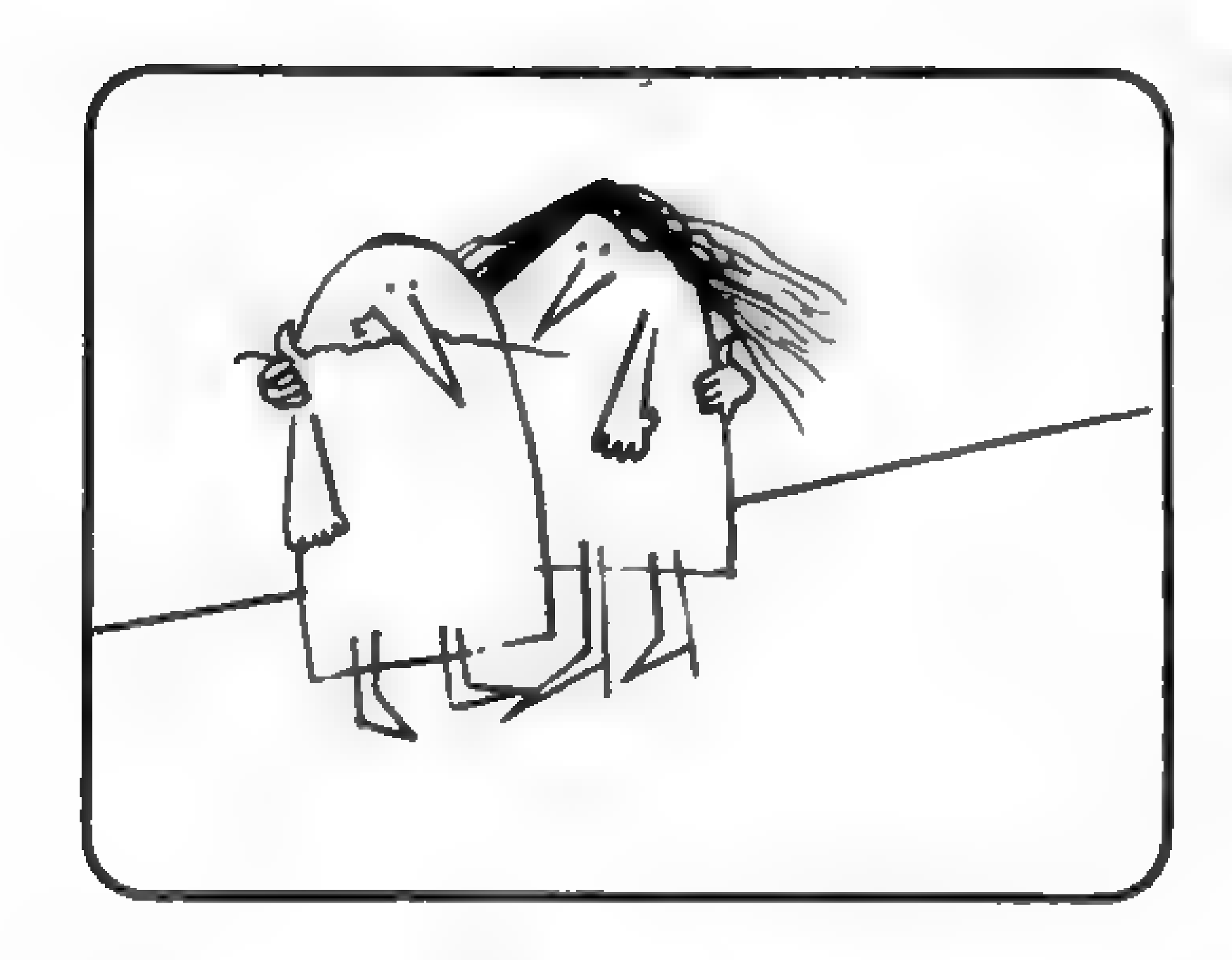


圖5. 芳小姐：「所以我參加東廳的舞會時，要緊跟著有鬍鬚的男人。」

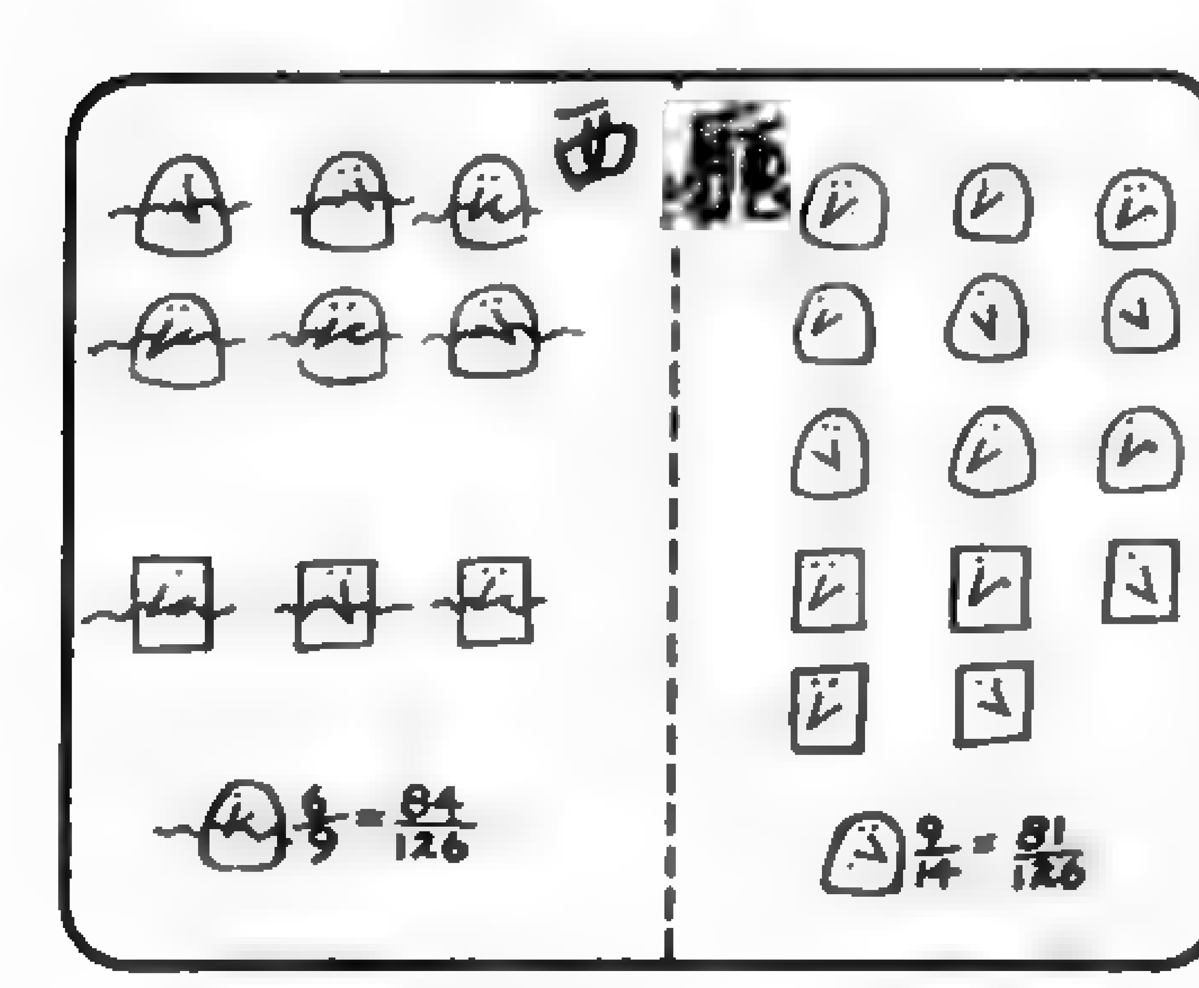


圖6. 她對西廳統計所得的數字也類似，有鬍鬚的花心男子佔一百二十六分之八十四；鬍子刮乾淨的花心男子佔一百二十六分之八十一。

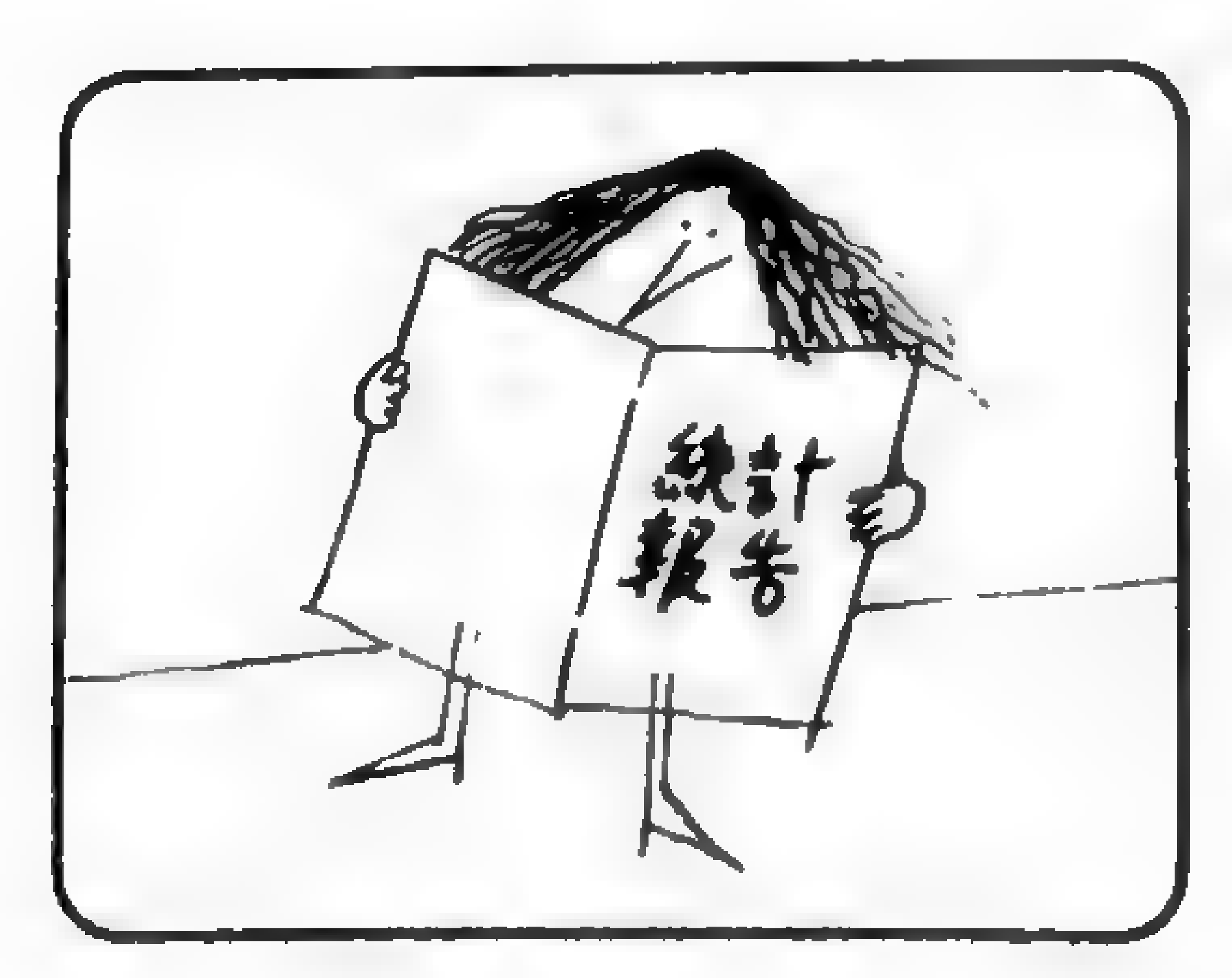


圖7. 芳小姐：「多簡單，在兩個舞會中，如果我多和有鬍子的男人廝混，就比較可能遇到花花公子。」



圖8.芳小姐抵達「矛盾俱樂部」時，兩個團體決定合併舉行派對，大家都轉到北廳去了。



圖9.芳小姐：「現在我該怎麼辦呢？如果在個別的團體中，最佳的選擇爲有鬍子的男人，那麼兩個團體合併後，最佳的選擇應仍是有鬍子的。不過我最好還是算一下合併後的結果，比較保險。」

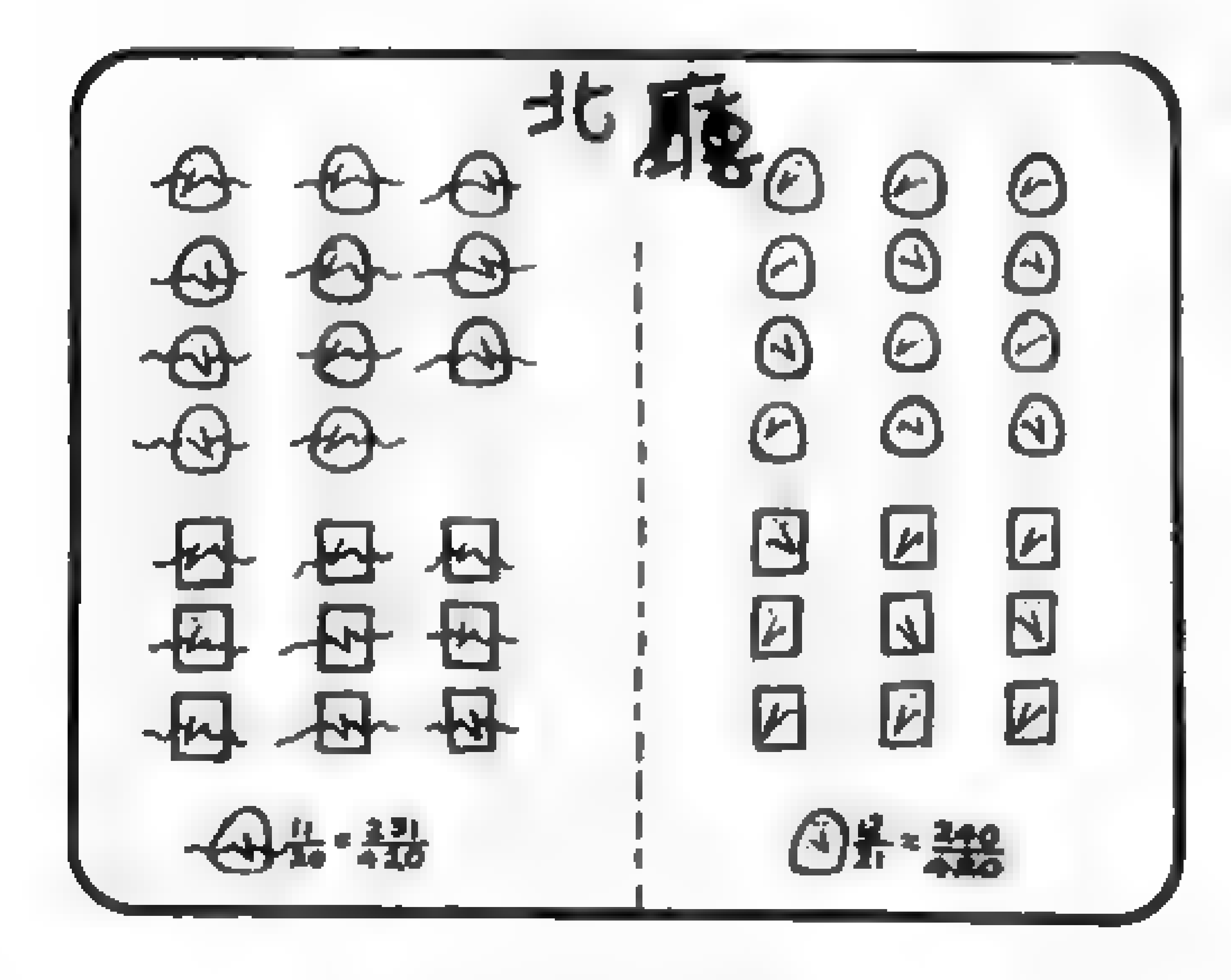


圖10.等她算好後，結果却令她大吃一驚，比例完全改觀了，現在她最佳的選擇是一沒有鬍鬚的男子。

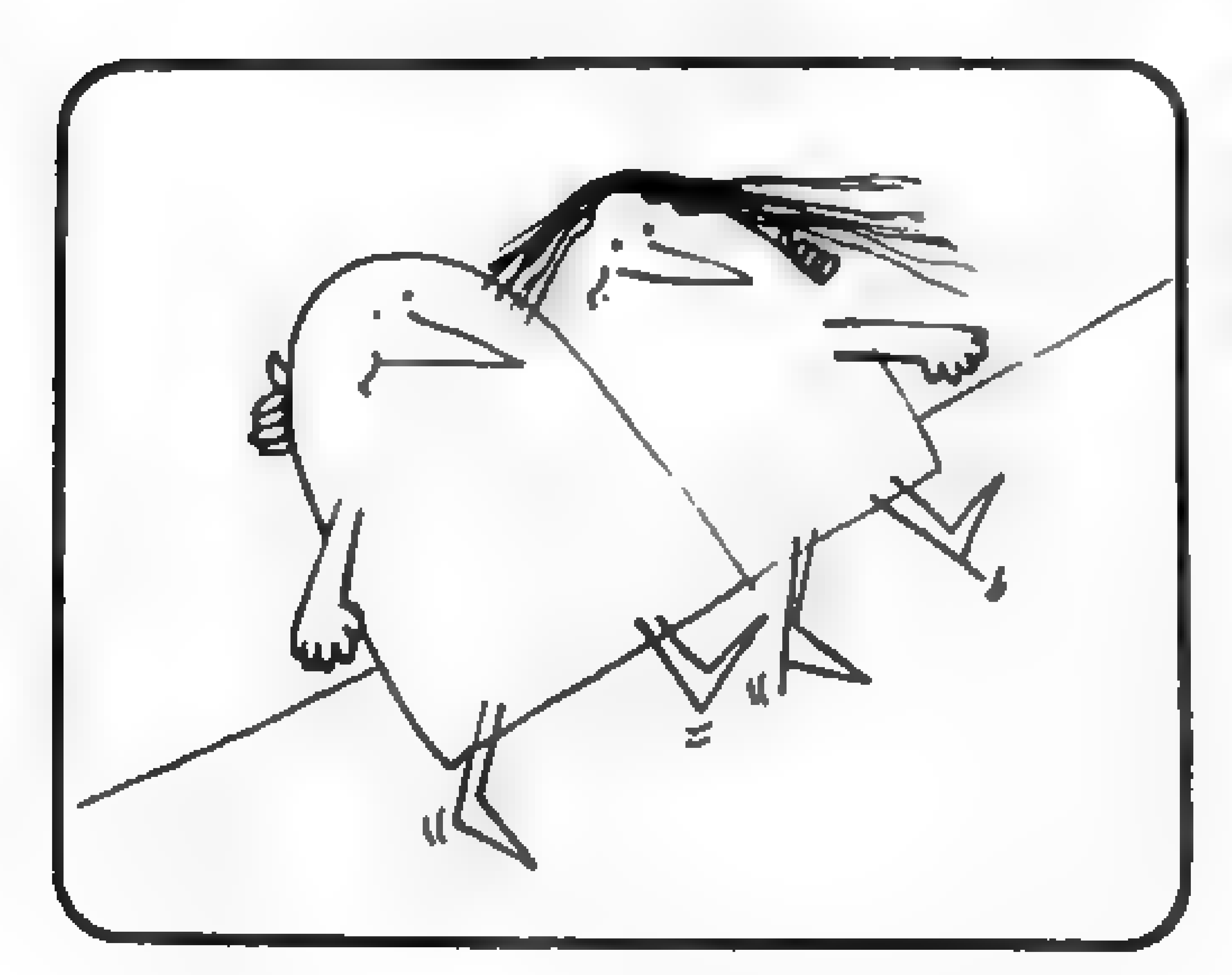


圖11.芳小姐：「改變戰術後，果然有效。不過我還是搞不懂爲什麼會變成這樣。」

你可以用撲克牌很輕易地模擬出這個矛盾。紅色牌代表花花公子，黑色牌代表正人君子，牌的背面有X的代表有鬍鬚，沒有X表示沒有鬍鬚。照著前面的圖，試試看結果如何。

統計學家在分析藥物測試的資料時，常會出現這類的矛盾。例如用紙牌代表參加測試的兩組人，以X代表服的是眞藥，沒有X代表服的是寬心劑（無實際藥效的藥）。紅色牌代表服藥後有起色；黑色牌代表服藥後未見改善。個別分析這兩個測試時，得到的結果是服藥者比服寬心劑者，療效來得好。可是把兩個測試的結果合併分析時，又變成服寬心劑的人效果較好。這個矛盾可說明，要設計出一個好的實驗，能產生足以信賴的統計結果，是多麼困難。

大學生是否能進入研究所，可能隨性別而異。在申請進入研究所的男學生中，有四四％可獲得入學許可；而只有三五％的女生可獲得入學許可，由於男女生的條件幾乎一樣，所以這似乎有性別歧視。

不過，用相同資料來檢視那個系最有性別歧視時，結果發現每個系反而是女生

比男生更有機會入學。這當如何解釋呢？產生這個矛盾的原因，是因爲有很大比例的女生想進入難唸的系，當然拒絕的比例就比較高了；但是如果以一個系一個系來看，女生比男生更有機會進入研究所。只有在全部的數據合併在一起時，男優於女的偏見才會出現。澄清這個矛盾的起源後，大學就洗清罪名了嗎？也許吧！不過還是有人懷疑，是否可能有人設計出一個體系，讓女生喜歡選修的研究所科目的功課更難。



時　間

從最小的次原子粒子，到最大的星河，宇宙一直在改變，在時間無情的「流動」中，宇宙簡直瞬息萬變，不可思議。我們之所以把「流動」括起來，是因爲眞正在動的是宇宙，說時間流動就和說長度延伸一樣毫無意義。

很難想像一個沒有時間的眞實世界。一個只存在零秒的物體根本就不可能存在！或者，這種說法還有存疑的餘地？不論如何，宇宙的變動可說是非常規律的，因此可測量出來，得到數字和方程式。純粹數學(pure mathematics)或許可視爲沒有時間性的，可是在應用數學中，從簡單的幾何，到微積分，到更高層次的數學，很多問題中，時間都是個基本的變數。

本章集合了各式有關時間運動(motion)的有名矛盾。有些是在古希臘時代就熱烈討論的，例如季諾的矛盾(Zeno's paradox)，另外像相對論中時間的「膨脹」(dilation)，表現「超級任務」(supertasks)的無限機器(infinity machine)等等，都是本世紀的產物。這些內容都會令你對矛盾和數學的興趣大增。

停擺的鐘

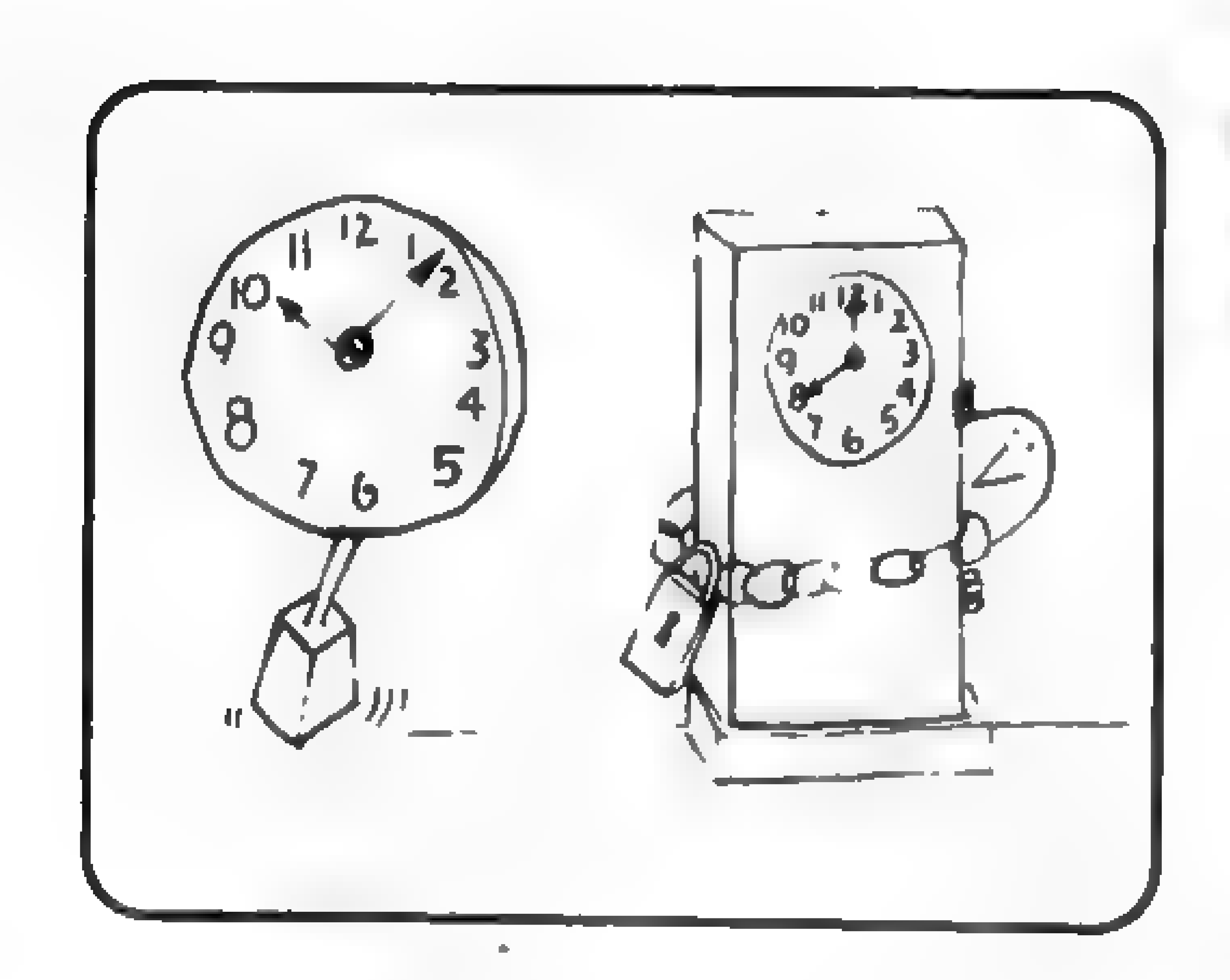


圖 1. 圖中兩個鐘，那個比較準時？一個鐘每天慢一分鐘，一個則是完全停擺。

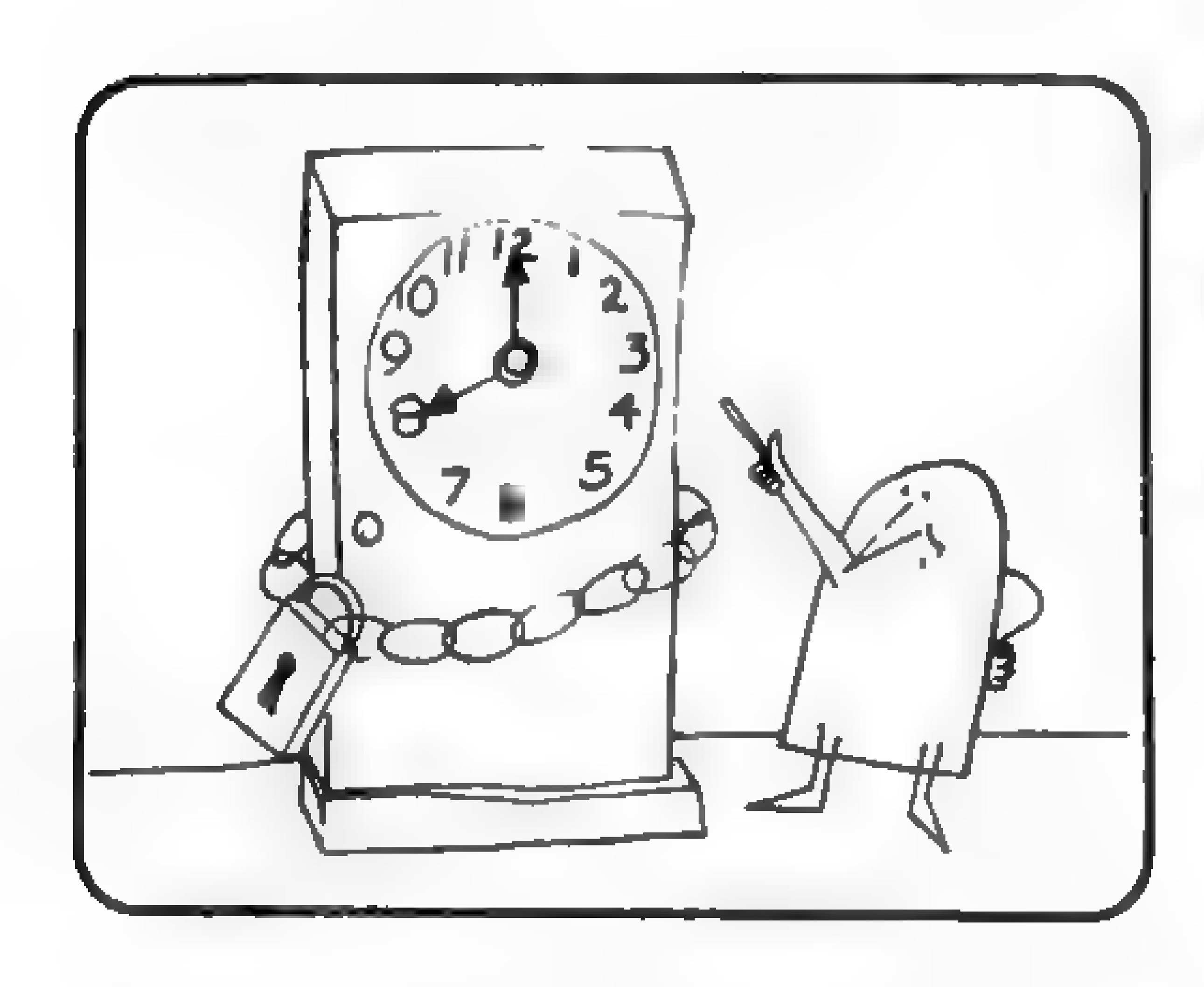


圖 2. 卡洛(Lewis Caroll)認爲：每天慢一分鐘的鐘，每兩年準時一次，而停擺的鐘每二十四小時可以準時兩次。所以停擺的鐘比較能報時，你同意嗎？

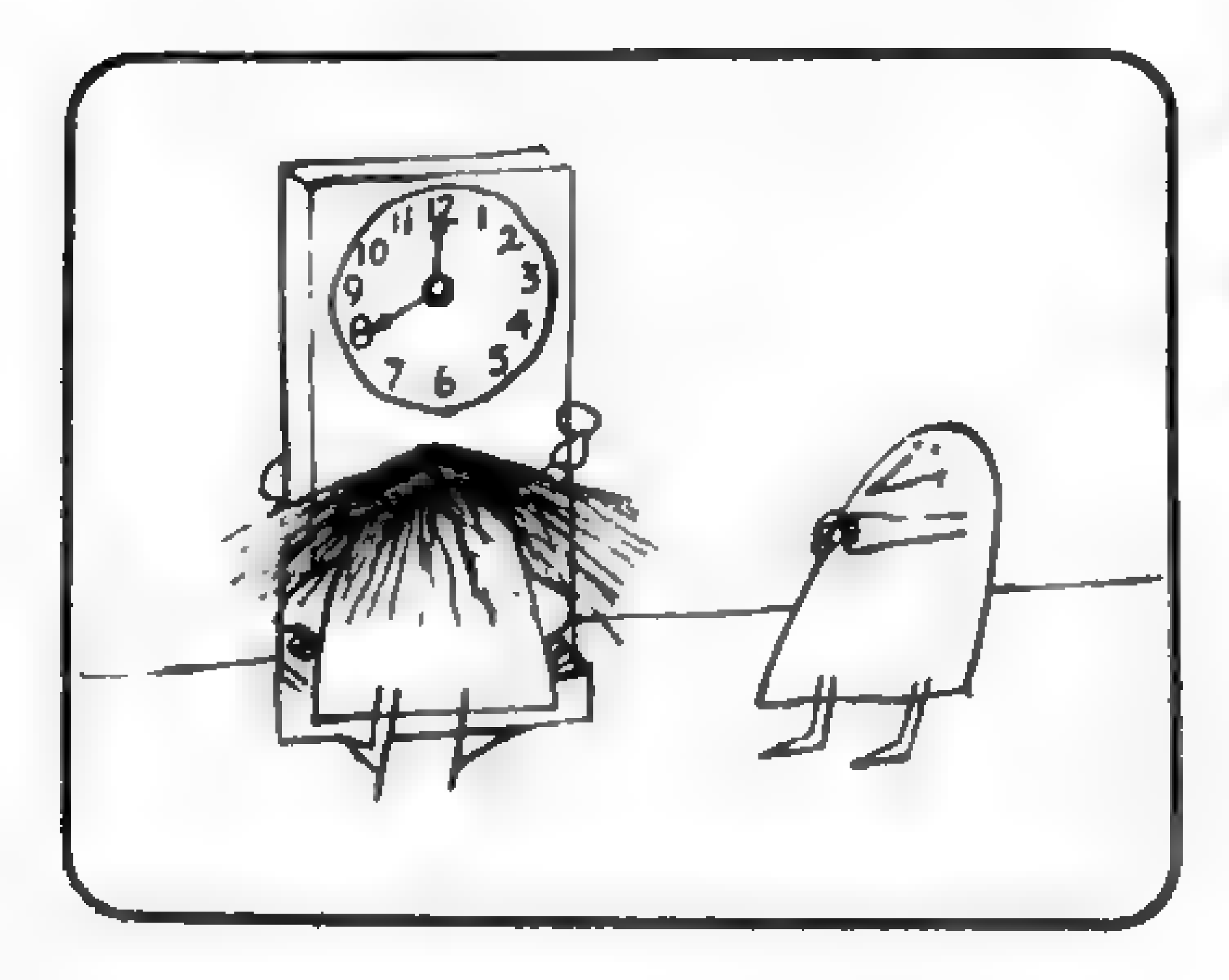


圖 3. 艾麗絲很迷惑，她說：「我知道這個停的鐘，每到八點就是準時的，可是我怎麼知道什麼時候是八點呢？」

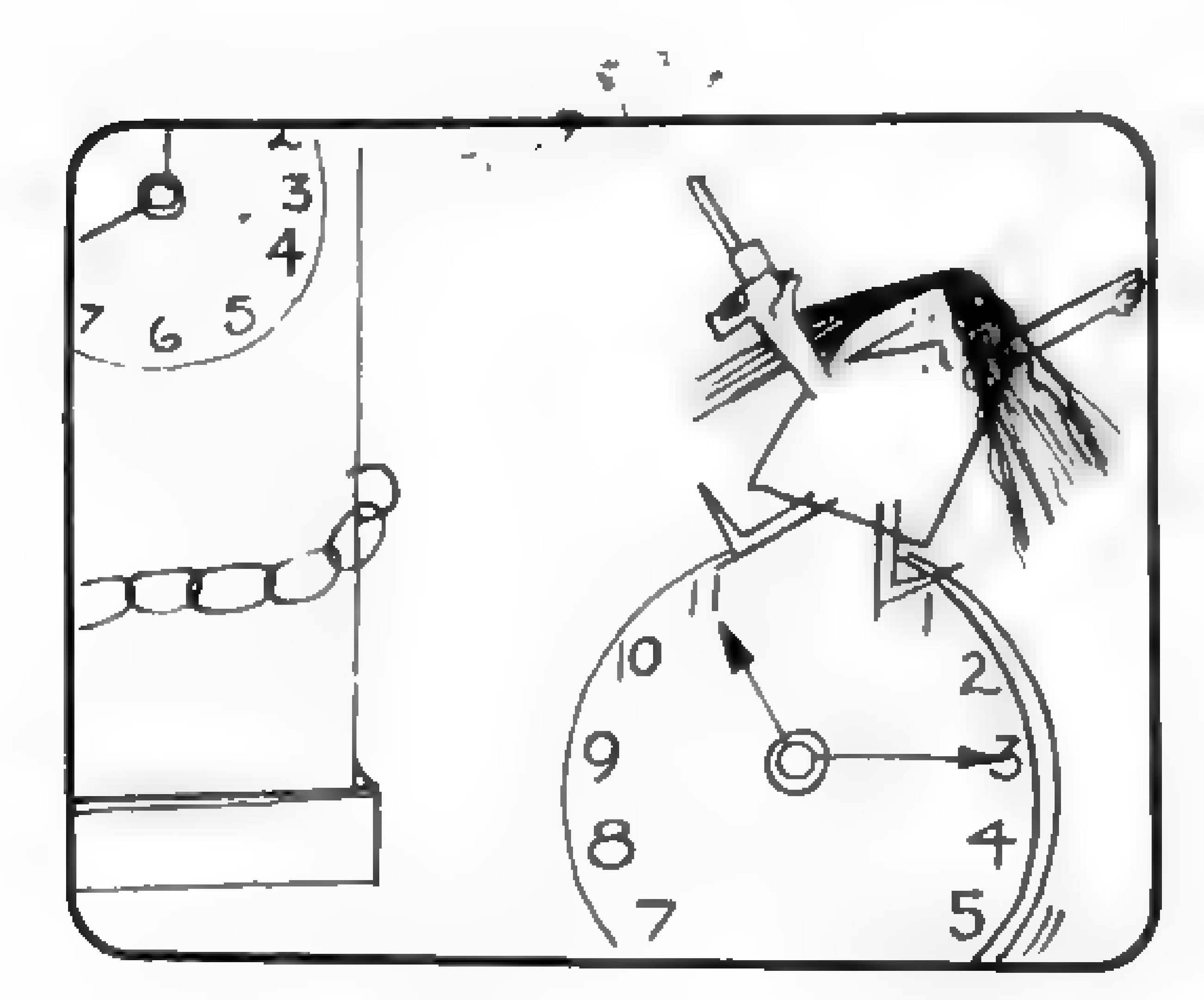


圖4. 卡洛：「很簡單，你只要拿把手槍在停走的鐘旁邊。」

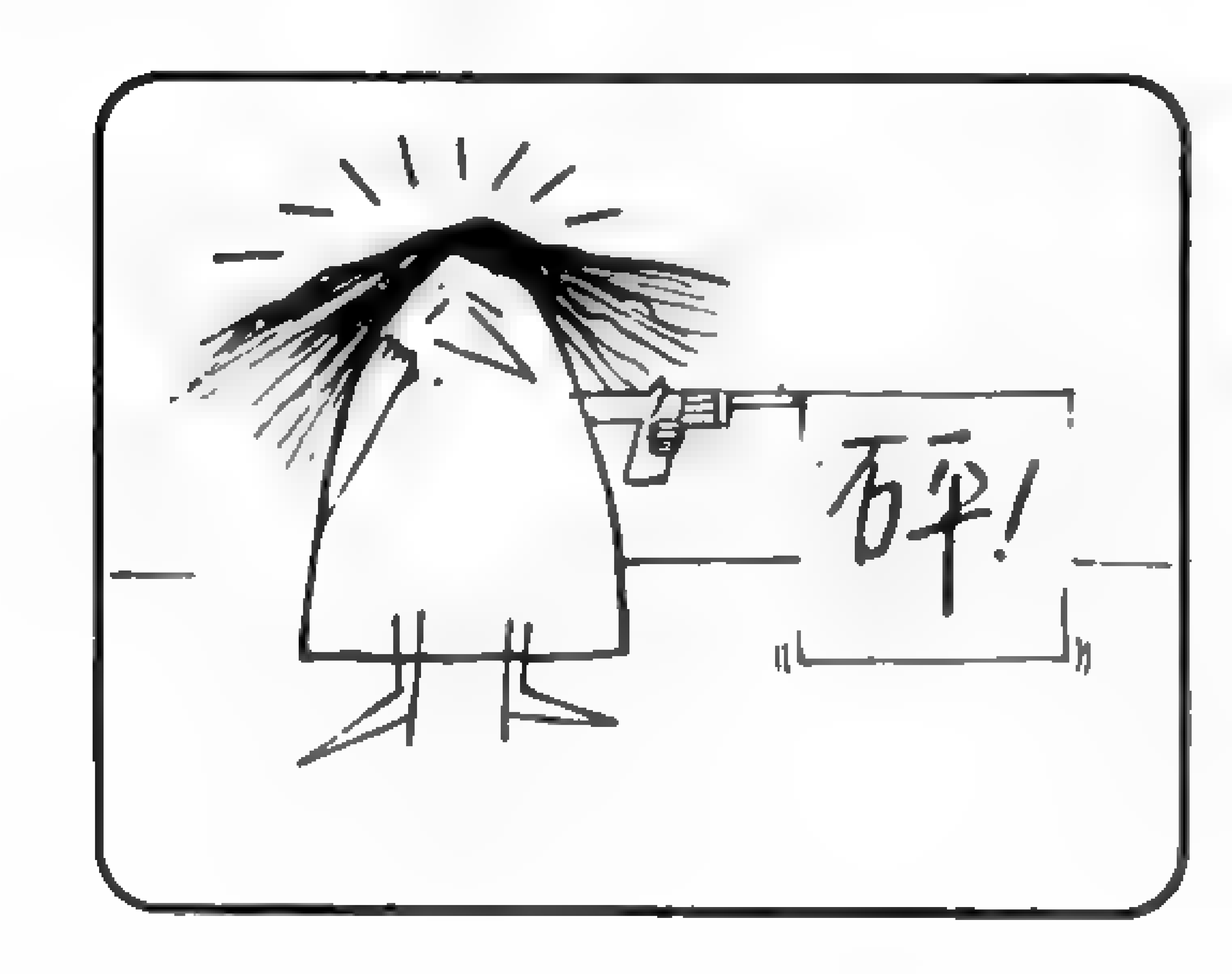


圖5. 卡洛：「看着鐘，只要準八點一到，就開槍，聽到槍聲，我們就知道是準八點。」

卡洛是道奇森(Charles L. Dodgson)的筆名，他在英國牛津大學教數學，在他許多著作中，都可看到關於這兩隻鐘的說法。

卡洛怎麼決定慢分的鐘多久可準時一次？由於鐘每天慢一分鐘，因此等足足慢了十二小時後，它又會準時啦，這需費時七百二十天。

受挫的滑雪者

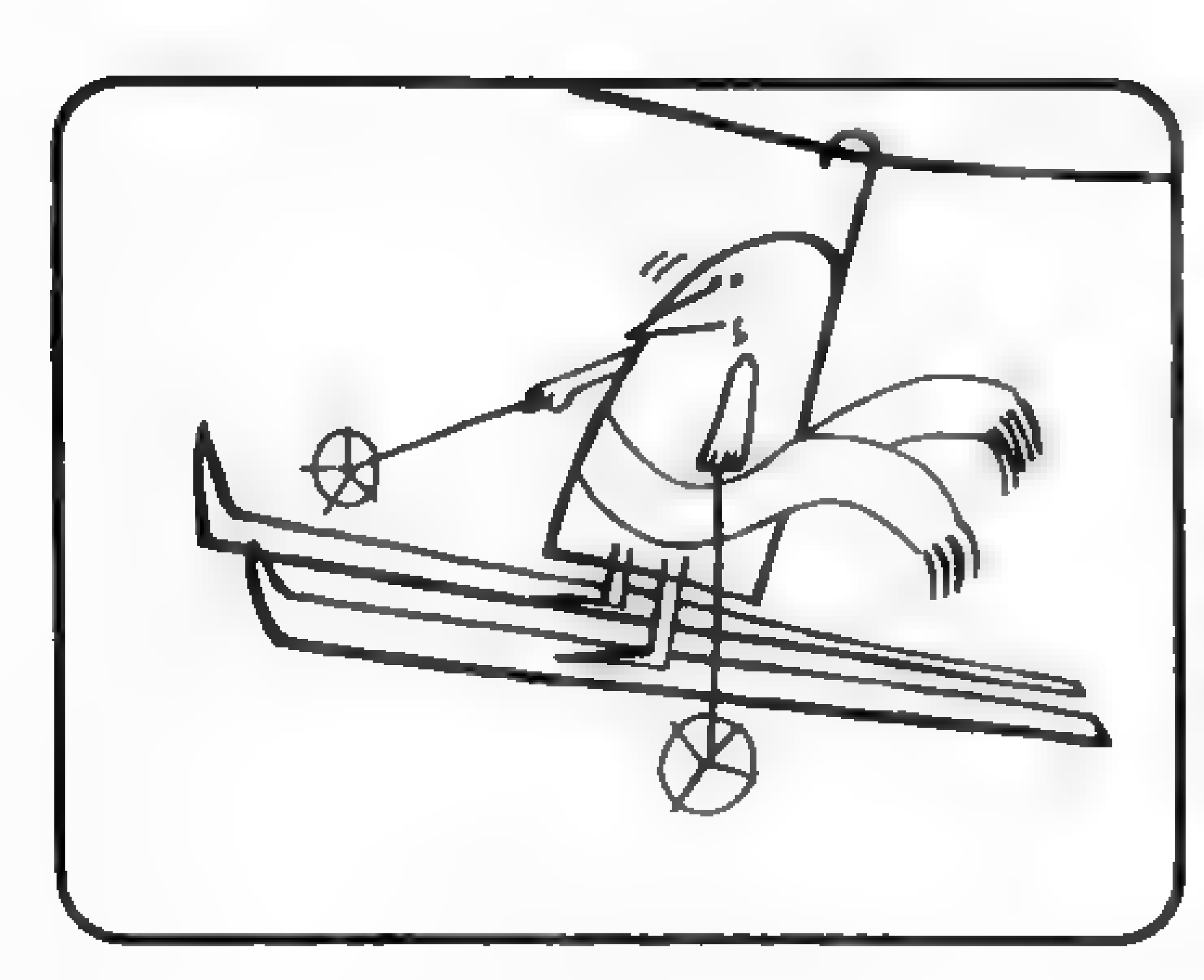
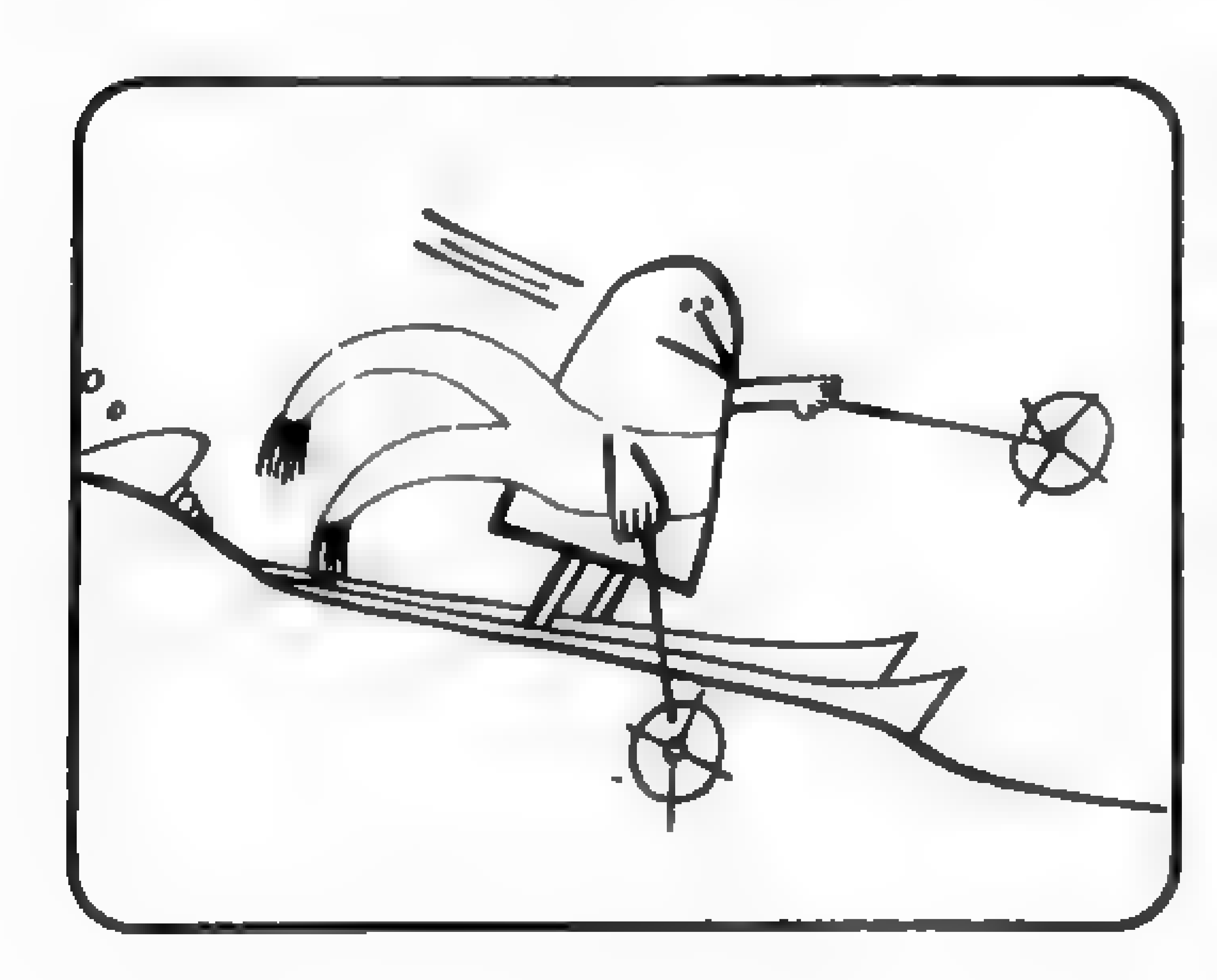


圖1.滑雪者：多棒的滑雪天氣，我眞希望這吊纜（譯註：在滑雪場，必須先坐吊纜上山，再滑下來）移動的速度能比每小時五公里更快。

如果滑雪者想加快他上山和滑下來的速度，讓來回一次的平均速度增加到時速十公里，那麼他滑下山的速度必須多快？



2.時速十五公里？六十公里？一百公里？的確很難置信，不過如果他想把來回一次的平均時速增加到十公里，那麼他必須在零秒內從山上滑到山下。

起先你會以爲這個矛盾和滑雪坡道的距離有關，事實上完全無關。滑雪者以某個速度上到某個距離的坡道頂端，然後換個速度滑下山，使得他上下山來回一趟的平均速度能夠兩倍於上山的速度。換句話說，他必須在上山所花的相同時間內，滑完兩倍相同的距離。很明顯的也就是他必須完全不花時間，就從山上滑到山下才能辦到。由於這根本不可能，所以他不可能把時速五公里增加到十公里。基本幾何學就能很輕易地證實此點。

季諾的矛盾

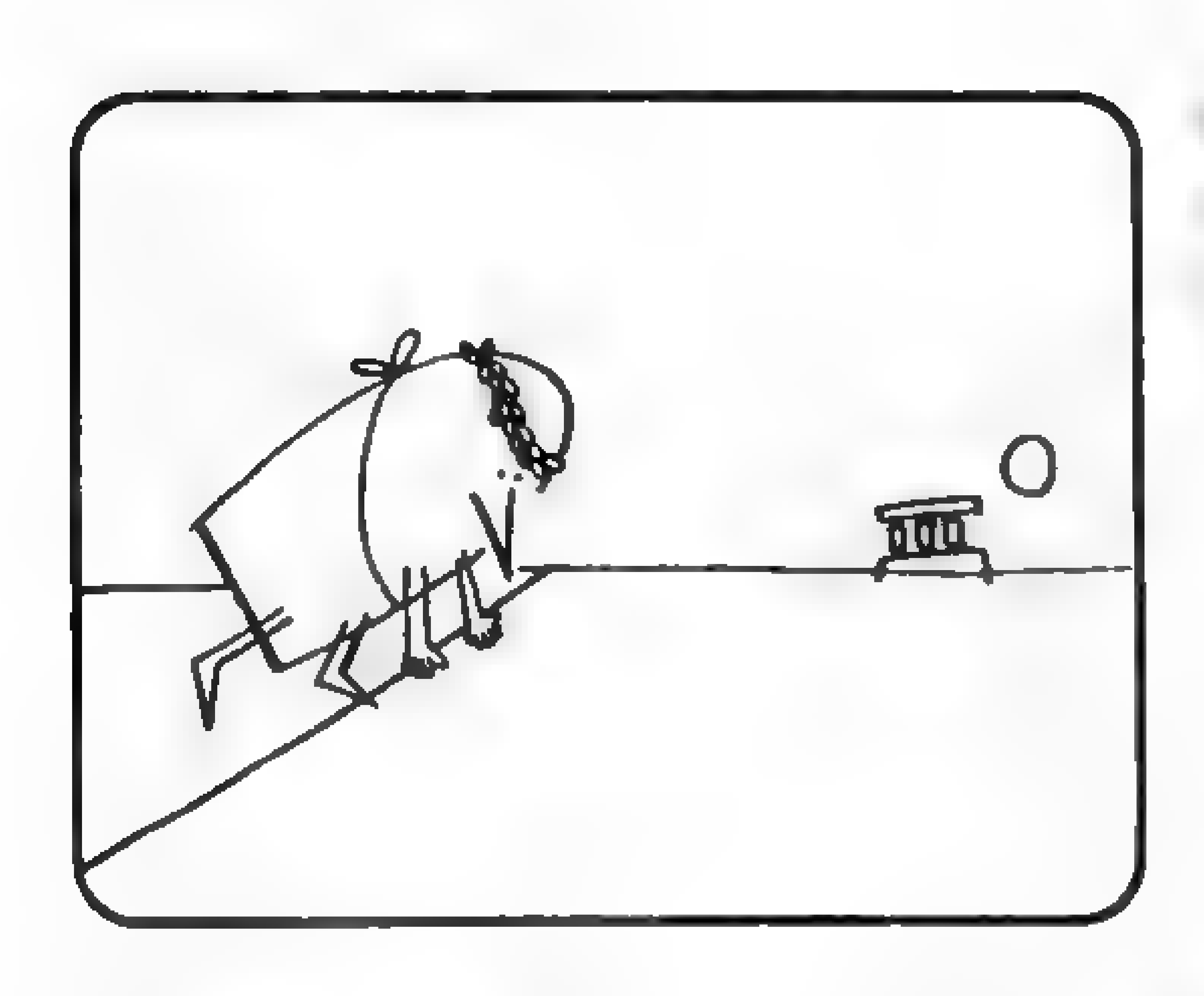


圖1. 古希臘人發明了許多關於時間和運動的矛盾，其中最著名的是季諾（Zeno，希臘哲學家，主張禁慾）關於跑者的說法。

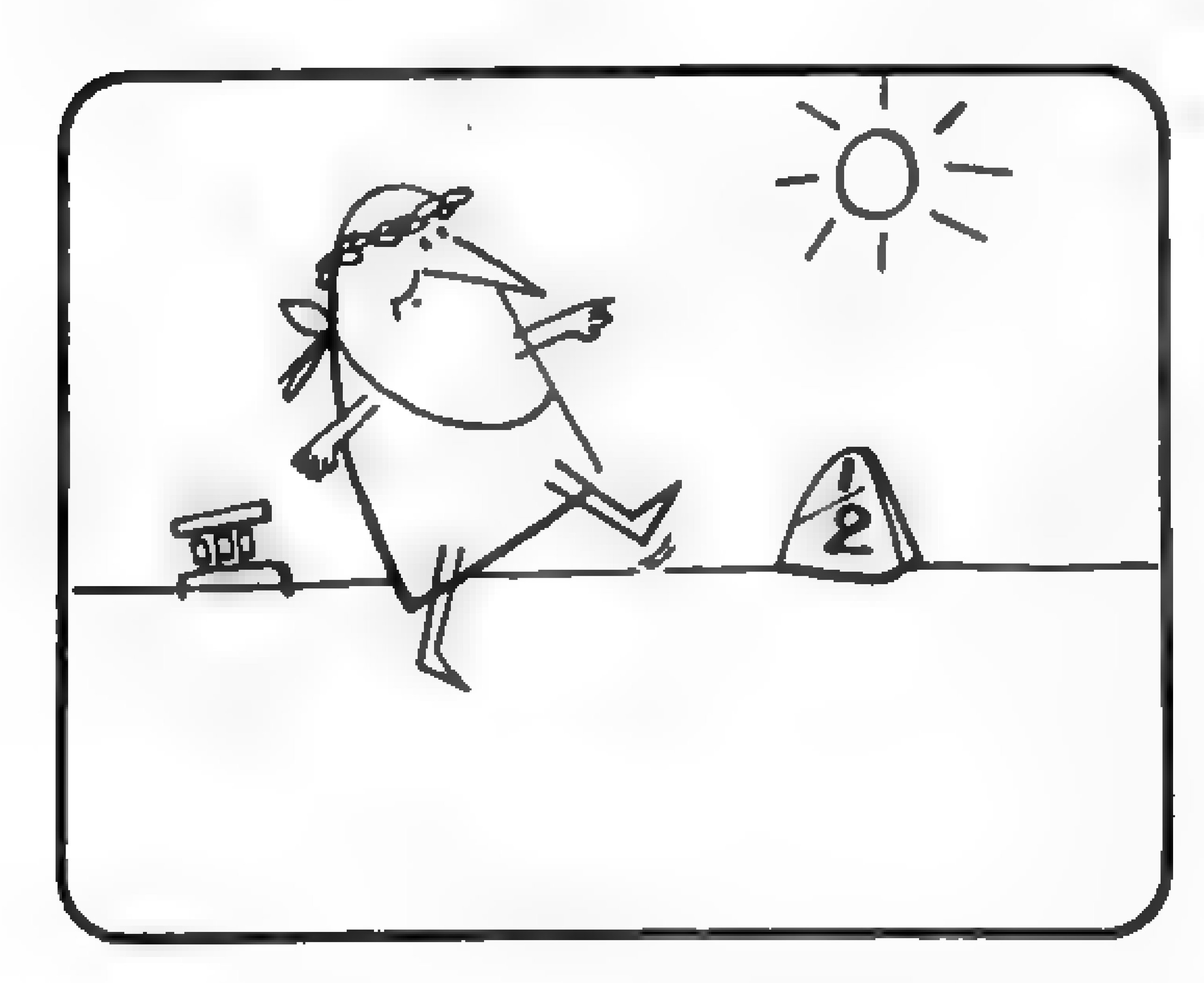


圖2. 跑者（選手）推理道：「在我抵達終點前，我得先經過中點；然後再經過剩下的一半—四分之三處。」

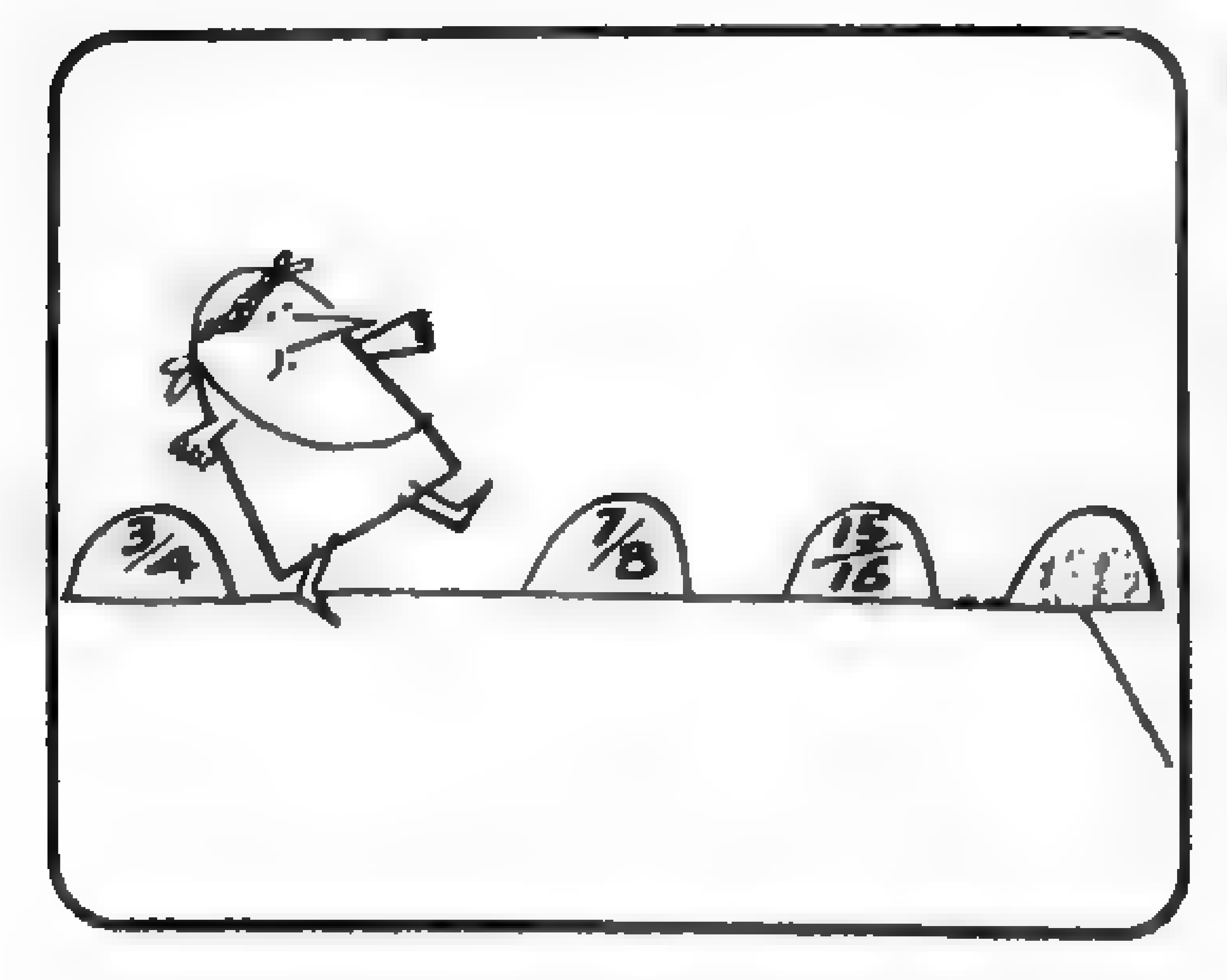


圖3. 跑者：「然後在我跑完最後四分之一前，我必須先經過另外一半的一半，再經過一半的一半的一半……沒完沒了，我永遠到不了終點。」

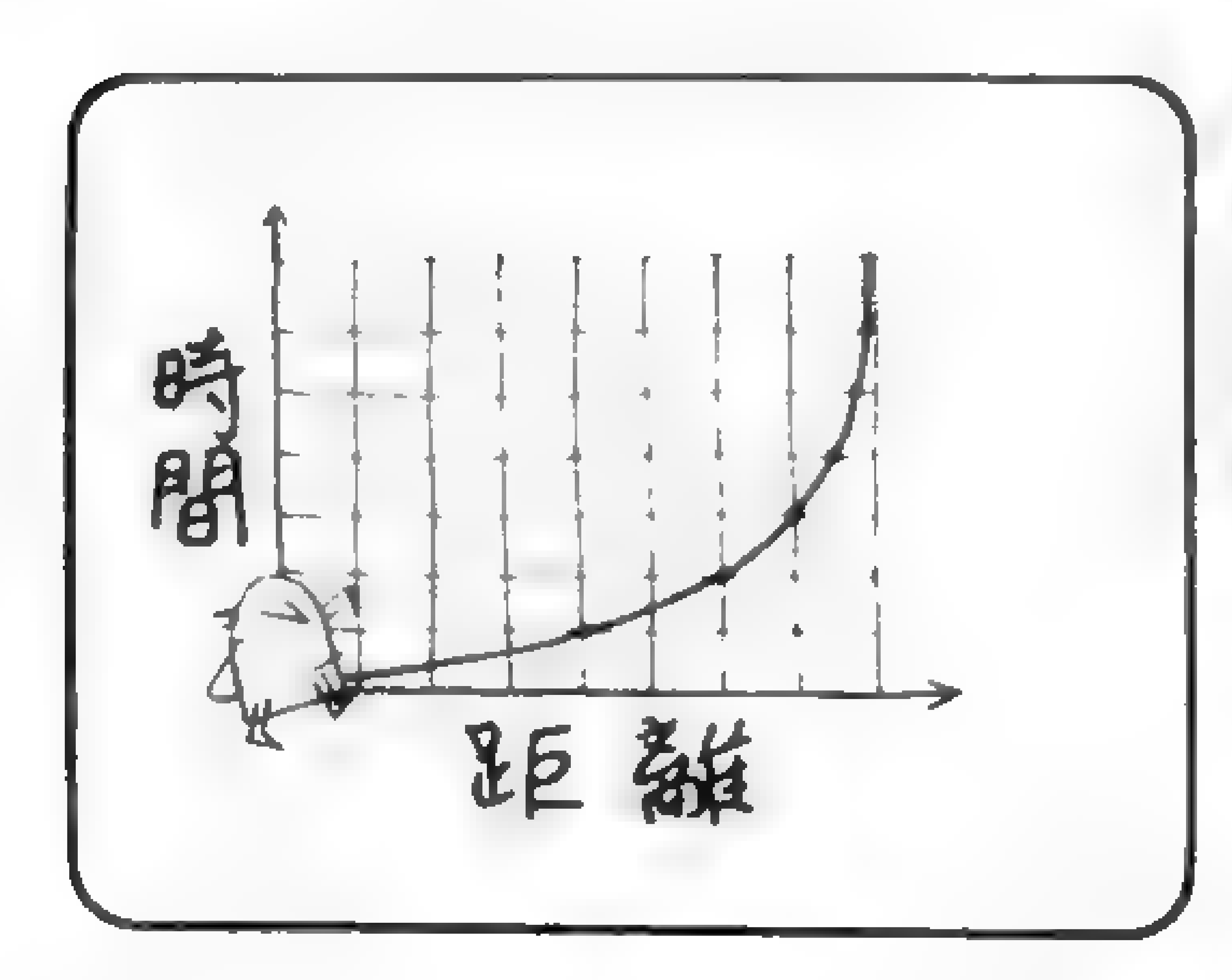


圖4. 假設跑者每跑一半路程都費時一分鐘，在時間一距離的圖表中，可看出他會離目標愈來愈近，可是卻永遠也無法抵達終點。這個說法正確嗎？

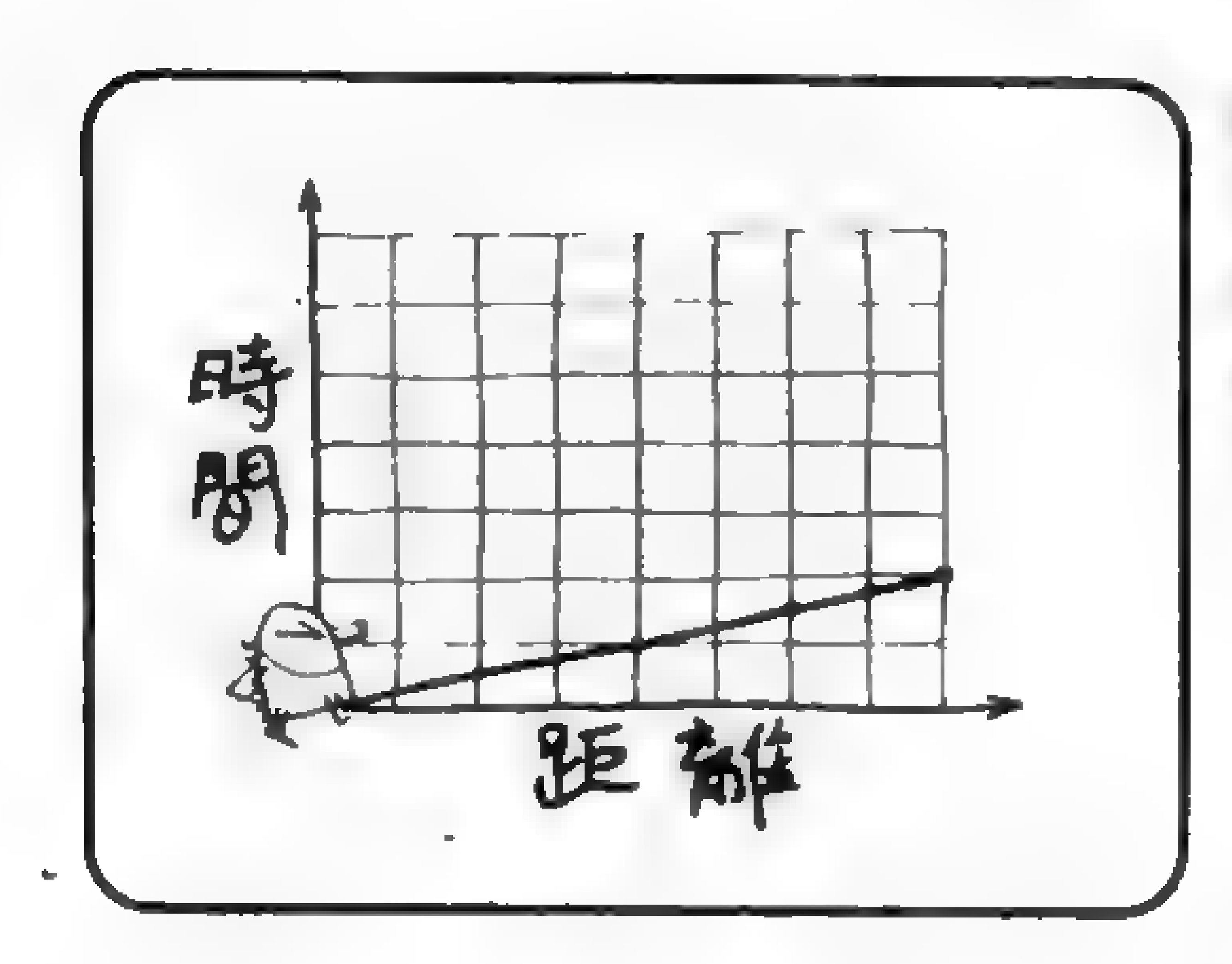


圖5. 不對，因爲跑者不需每跑一段一半路程都花一分鐘，而是只需前一段的一半。所以，他雖然會經過無數個一半的中點，但是他只需花兩分鐘就可跑完全程。

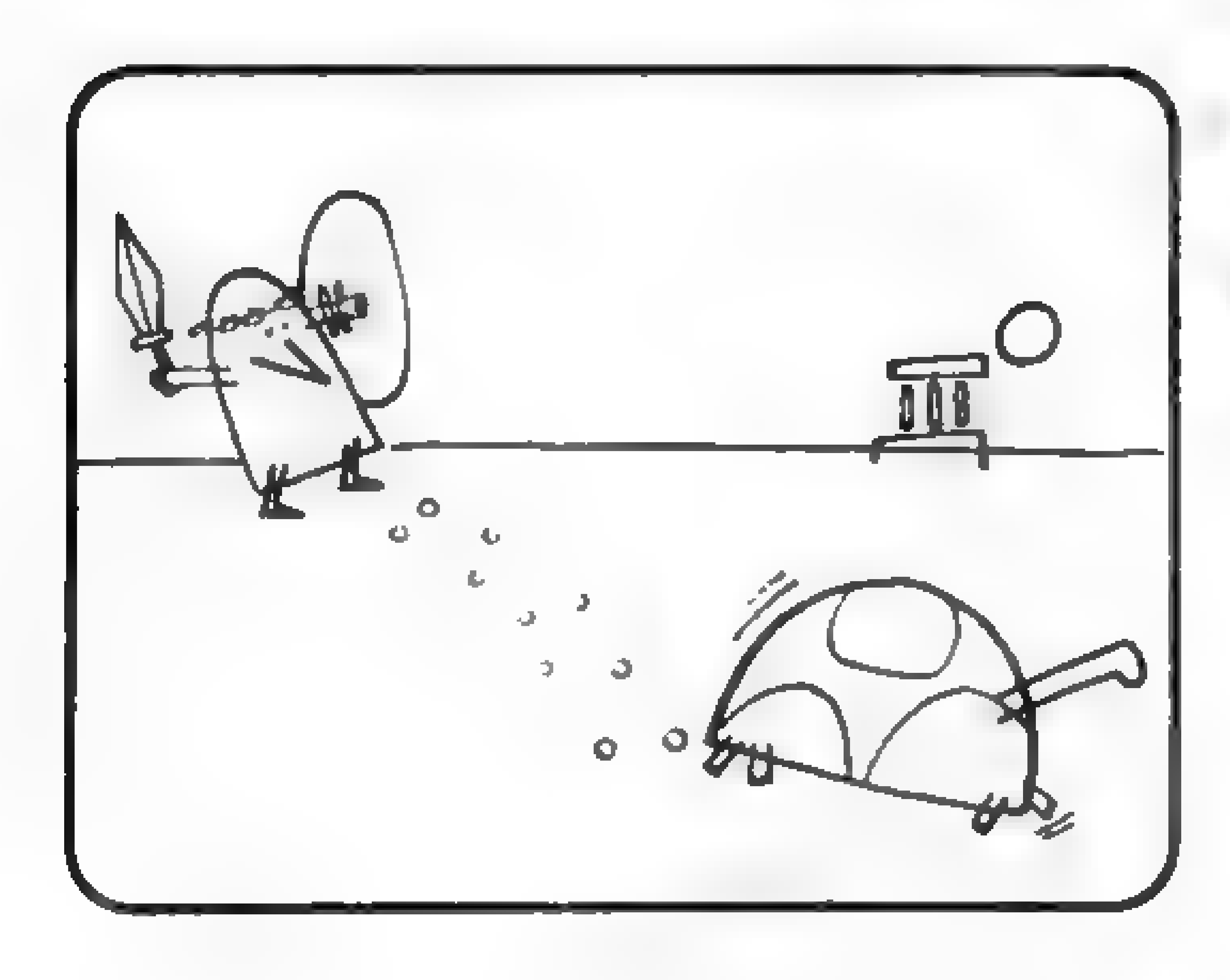


圖6. 季諾依此想出一個很有名的阿契里斯（Achilles，古希臘英雄）矛盾。這位戰士想捕捉在一公里外的烏龜。

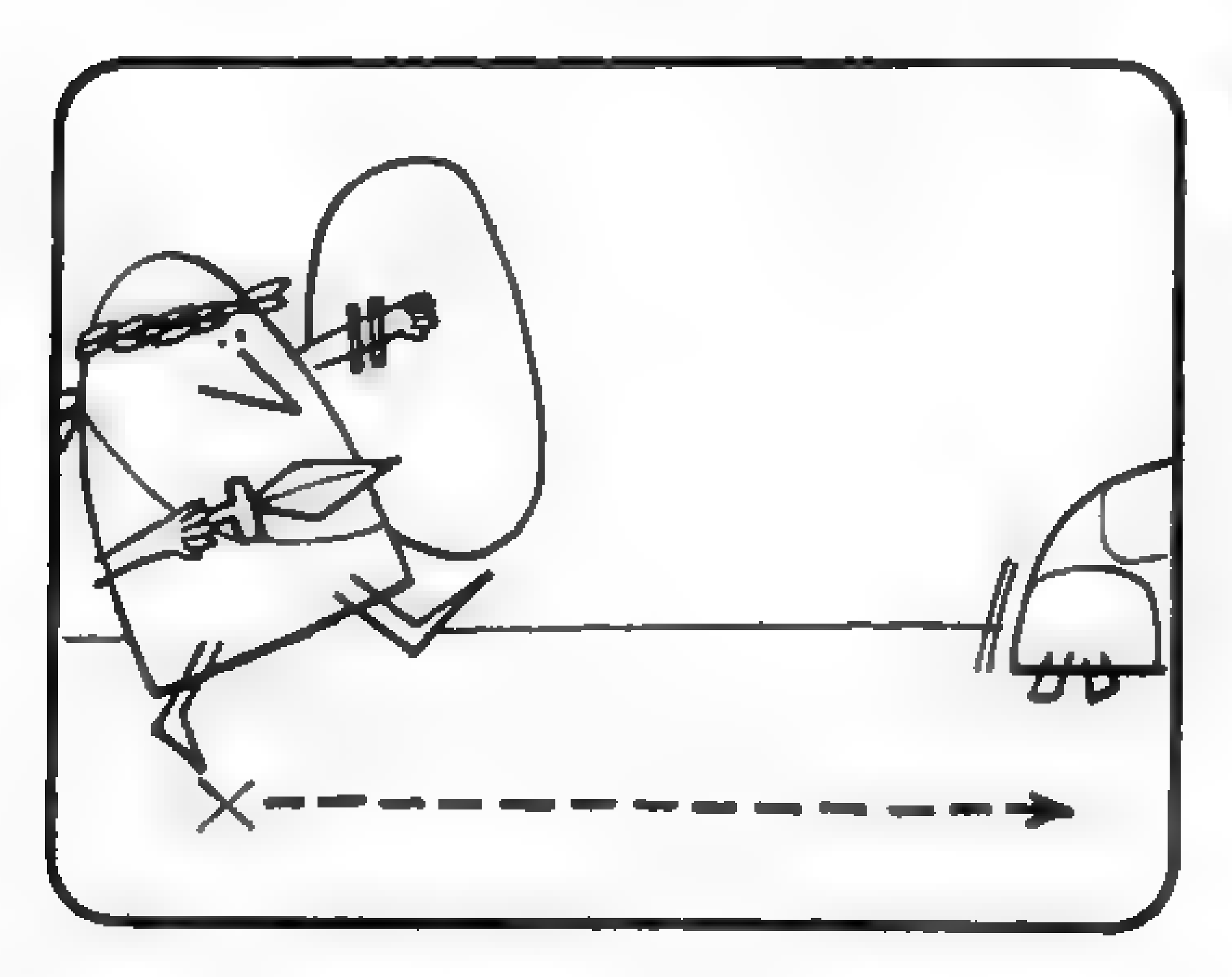


圖7. 當阿契里斯到達原來烏龜在的地方時，烏龜已經爬到更前面十公尺的地方。

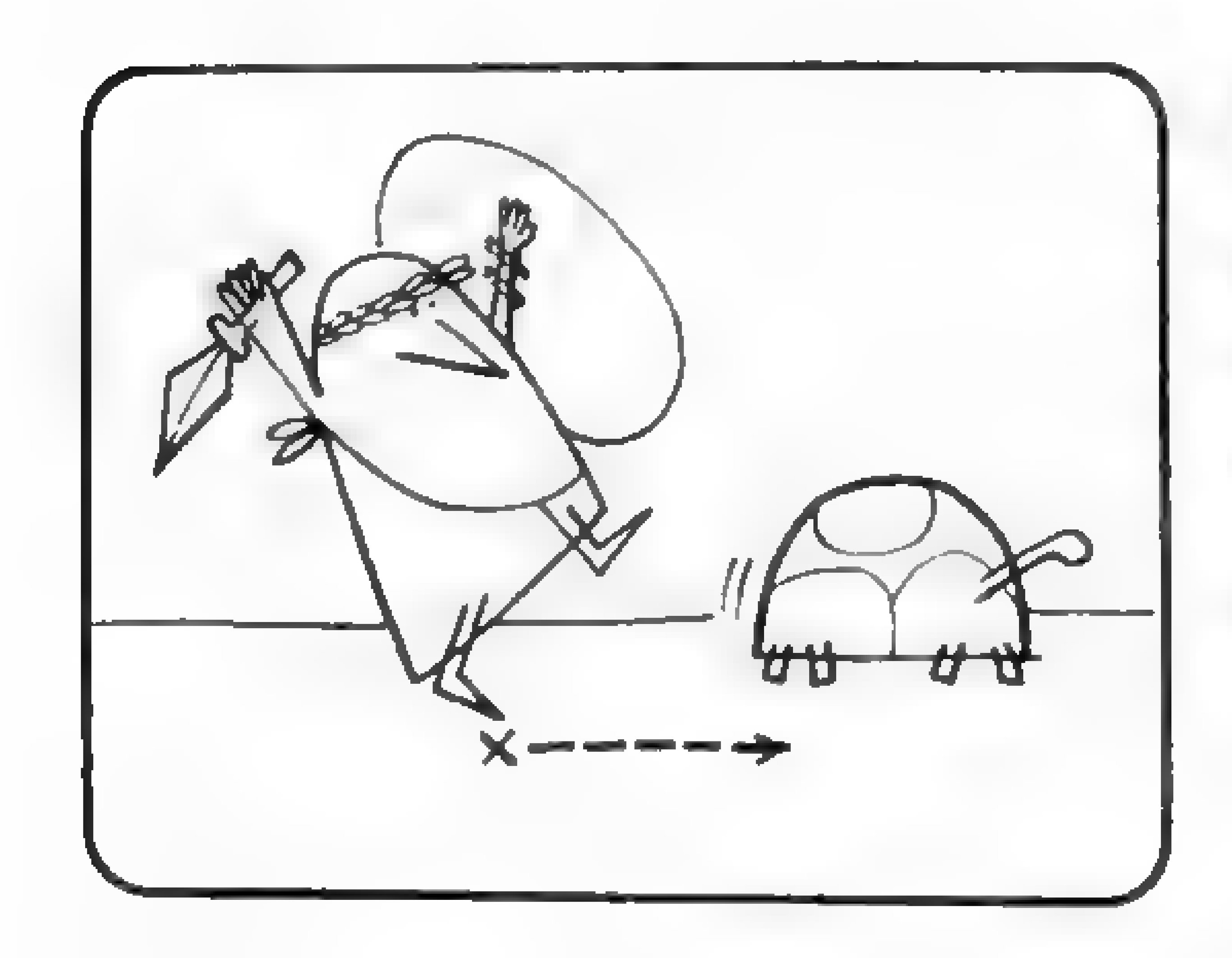


圖8.等阿契里斯追到前面那十公尺的地方時，烏龜又往前動了。烏龜：「你永遠追不到我的，老傢伙！每當你抵達我原先在的地點時，我就又已經多少往前移動了一點距離，即使是只有毫髮之差。」

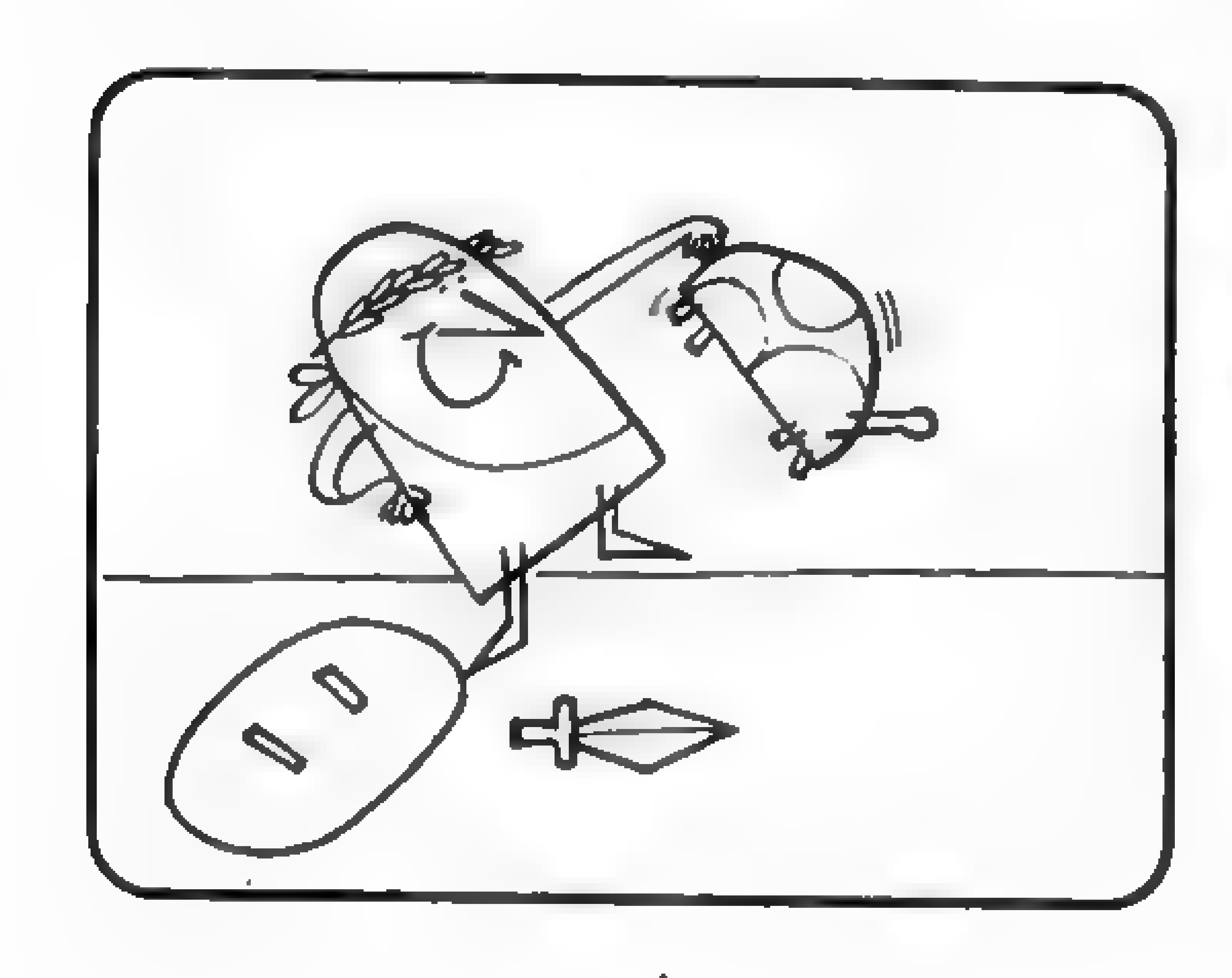


圖9.其實，季諾當然知道阿契里斯會抓到那隻烏龜，他只是想說明把時間和空間看成一串念珠般，是由無限的不連續的點所組成，這種看法會得出一個矛盾的結果。

在上述矛盾中，我們必須把跑者看成是在一條直線上以相同速度移動的點。季諾明白一個點從A點移動到B點，最後一定會抵達目的地。季諾的矛盾只是想指出，把運動解釋成分明的一點接著一點所連接成的一條線，以及把時間也能解釋成一段接著一段，是有困難的。

如果光是說跑者跑新的一半路程所需時間是前一半段路程所需時間的一半，所以跑者會抵達終點，這種說法並不能滿足季諾。他會說就像在一條線上永遠有另外一半的中點經過，所以永遠有下一個中點的瞬間要經過。簡言之，季諾用在線上的說法，也可用在時間上——時間雖然會愈來愈接近兩分鐘，但仍有無數的瞬間要經過。在阿契里斯和烏龜的矛盾中，也是相同的情形。在無限的過程中，每走完一步（指時間和空間），仍有無數的「下一步」要完成。

羅素在他的作品——「我們對外在世界之所知」(Our Knowledge of the External World)一書中，討論了季諾的矛盾，羅素認爲直到甘特(Georg Cantor)發展出無限集合的理論後，才算解決了季諾的矛盾。大多數研究科學的哲學家都同意羅素

的看法。

甘特的理論是把無限集合（不論是由空間的點，或時間的瞬間所組成）視爲完整的一體，而不是看成由分離的各點和事件所聚集而成的集合。而季諾矛盾的中心觀點就是不可能把時間和空間的片斷視爲一個無限元素所組成的集合，而是將之視爲像雪地上的脚印—相互分離且不連續。

橡皮繩

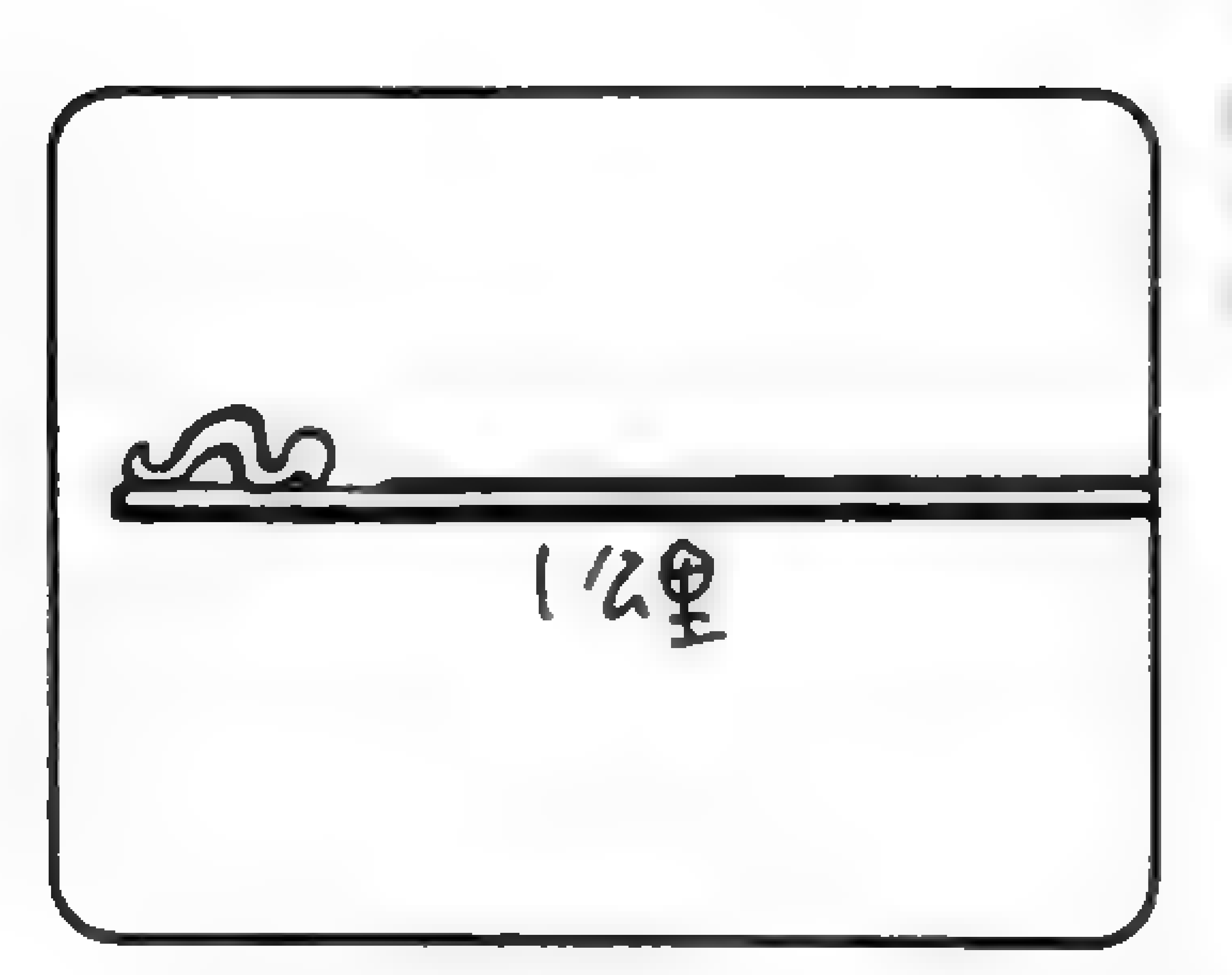


圖1. 下面這個矛盾是季諾沒有想到的。有隻蟲在一條橡皮繩的一端，繩子長一公里。

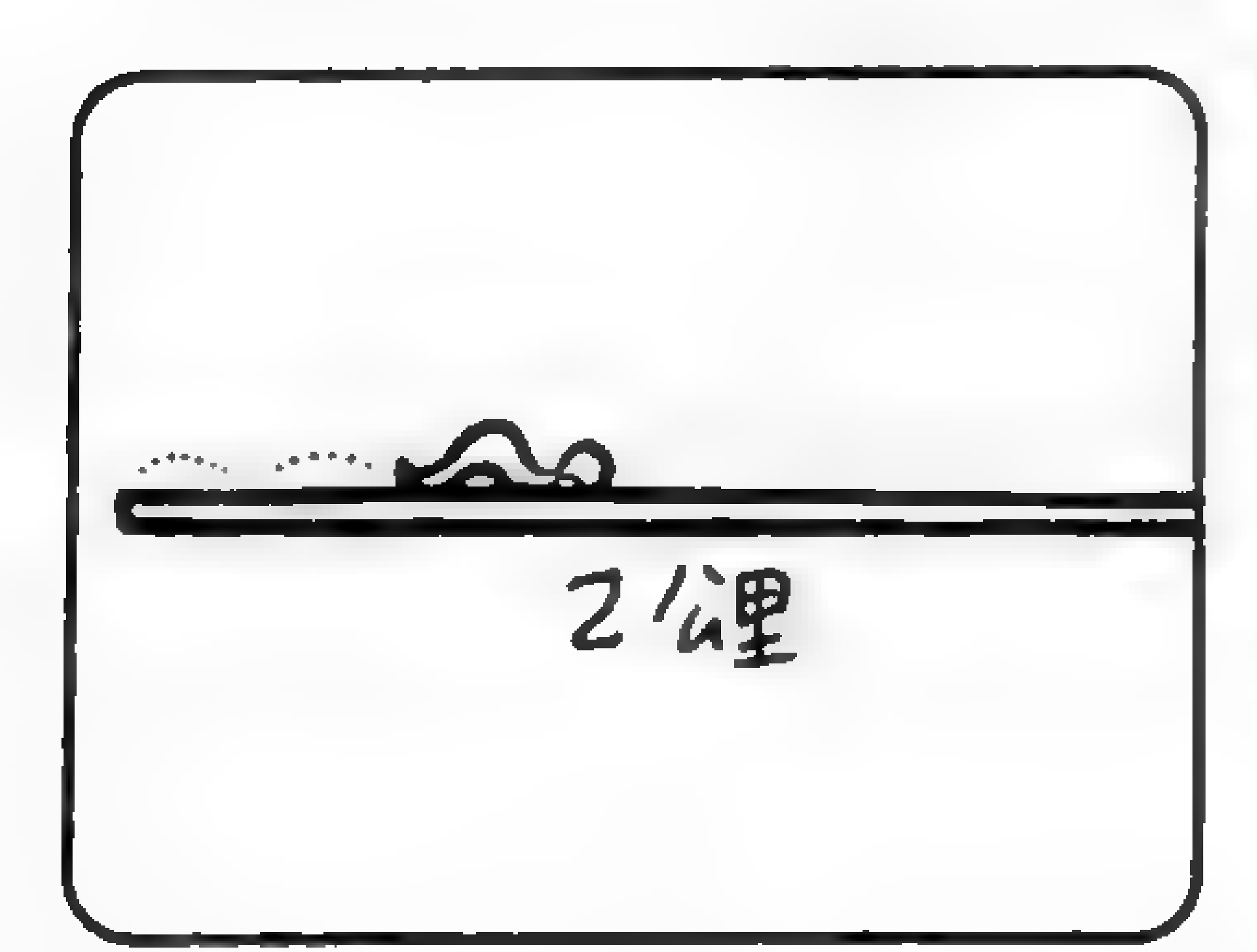


圖2. 這隻蟲沿著線爬，步伐穩定，每秒鐘可以爬一公分長。過了第一秒後，這條繩子會像橡皮筋一樣拉長成兩公里。再過一秒，它又拉長成三公里……一直下去。這隻蟲到底能否抵達繩子的終點？

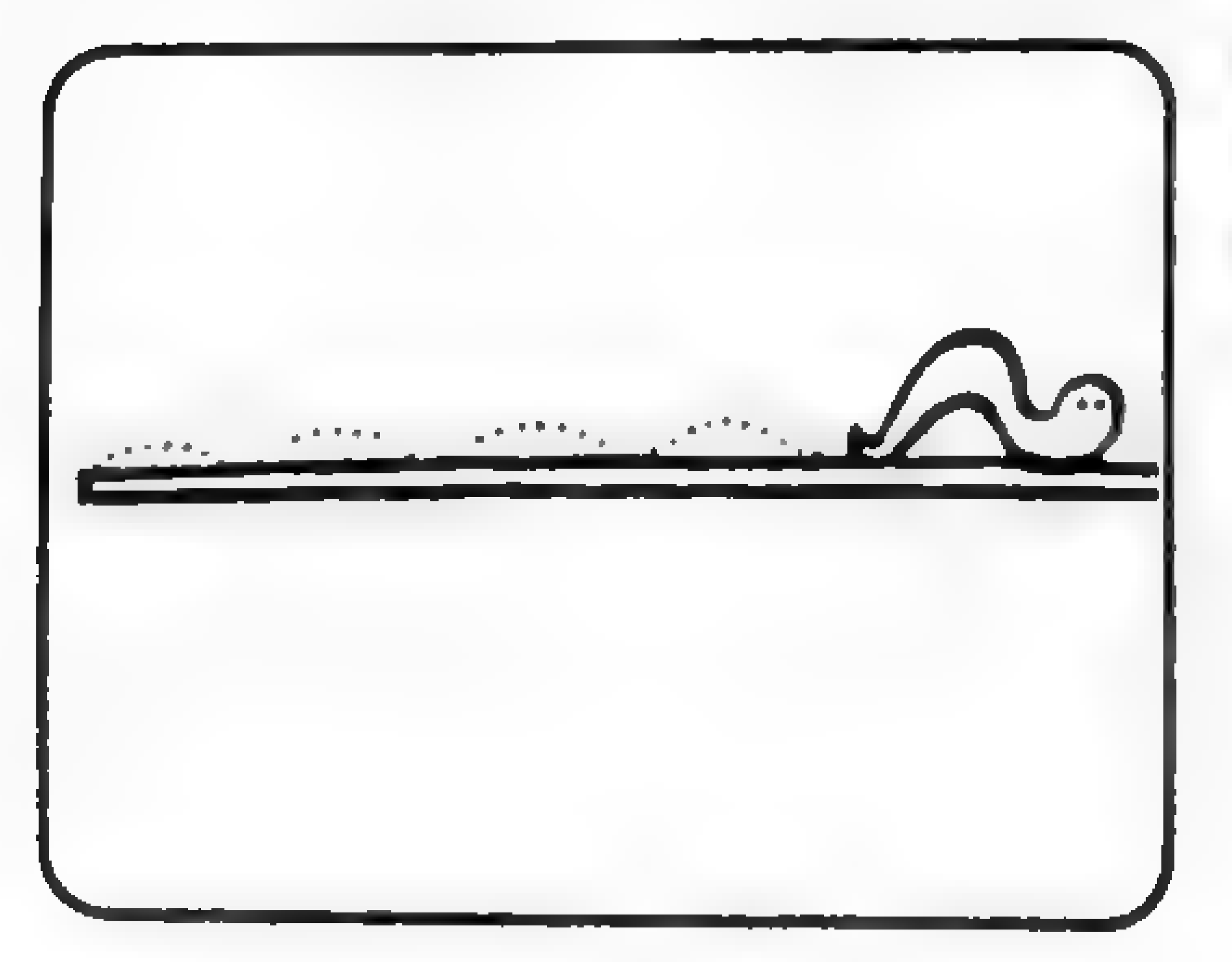


圖3. 你的直覺會告訴你──這隻蟲永遠到不了終點。可是事實上它能！它費時多少才能到達呢？

明白這條繩子會像橡皮筋等速拉長是解答這個問題的關鍵。這表示蟲往前爬，繩子就跟着拉長。

有個好辦法可解此迷惑—測量這條蟲每秒爬多長，再將此長度除以全繩在它爬完那一秒後的長度。當這些分數總和爲一時，這隻蟲就抵達了繩子的終點。

一公里有十萬公分，所以第一秒這條蟲爬完了繩子的十萬分之一；第二秒時蟲又往前爬了一公分，這段距離是繩子拉長成二公里後的二十萬分之一；到了第三秒，毛蟲又爬了一公分，佔繩長三公里的三十萬分之一；一直下去，直到K秒，毛蟲所爬過的長度，佔全長的比率，可表示成：

$$\frac{1}{100,000}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{K}\right)$$

在括號內的是「調和級數」(harmonic series)。先看看從二分之一到四分之一的和，其中三分之一和四分之一的和超過二分之一，然後五分之一到八分之一的和

也超過二分之一，如此一直下去，這個調和級數的和要多大就可以多大。

這隻蟲要爬到繩子的末端約二的二十萬次方秒，更精確的估計值爲「e」（即自然對數，値略大於二點七）的十萬次方秒。不過，最後繩子的長度甚至會比現知宇宙的直徑長度還長，而且蟲用的時間也大大超過了目前估計的宇宙年齡。當然，這問題只是把毛蟲當作「理想」繩上的一點──一隻眞的蟲大概在旅程剛開始不久就歸西了，而一條眞的繩子其分子也早已散佈在廣大的空間中──根本察覺不出來了。

如果改變繩子延伸的速度，問題會更有趣。例如，如果繩子依幾何級數(geometric progression)加長，就說以每秒兩倍的速度加長吧，情況又如何？這隻蟲就永遠也無法抵達繩子的終點了。

傷腦筋的燈

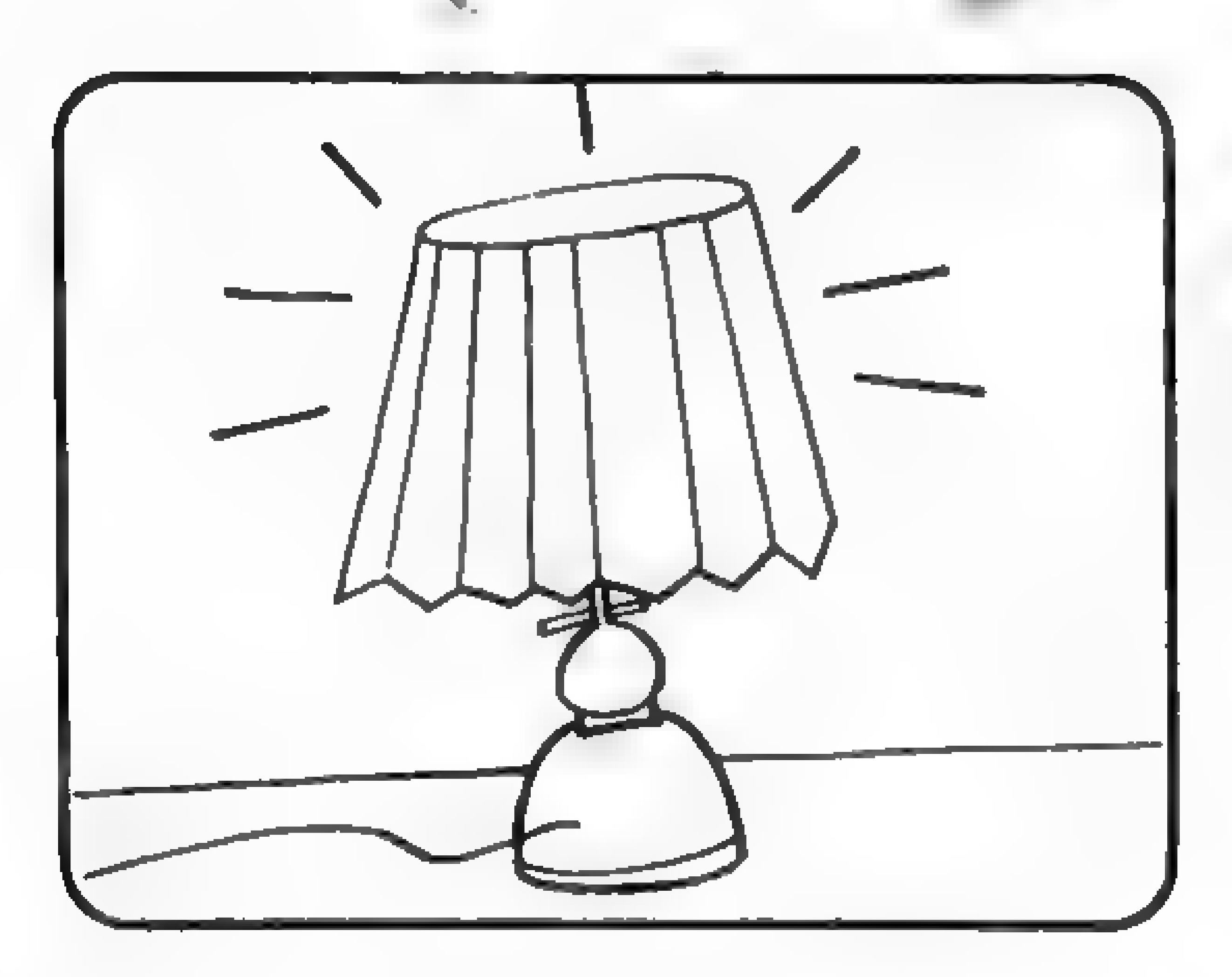


圖1.哲學家現在爭論一種新的時間矛盾，叫做「超級任務」。最簡單的可用燈來說明。燈有個開關的按鈕。

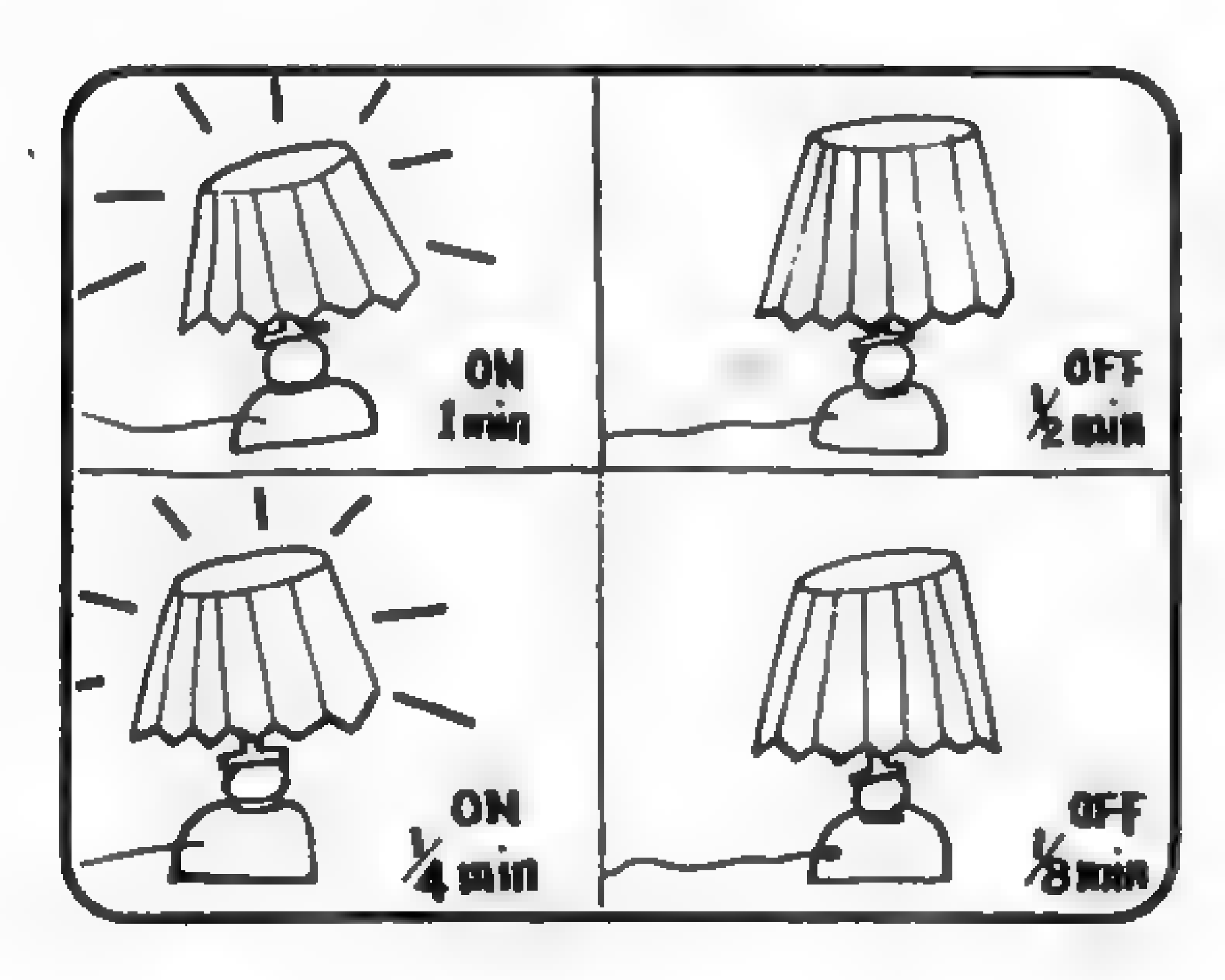


圖2.燈開一分鐘後，關二分之一分鐘，再開四分之一分鐘後，關八分之一分鐘……。這個程序持續兩分鐘，兩分鐘後，燈是開的還是關的？

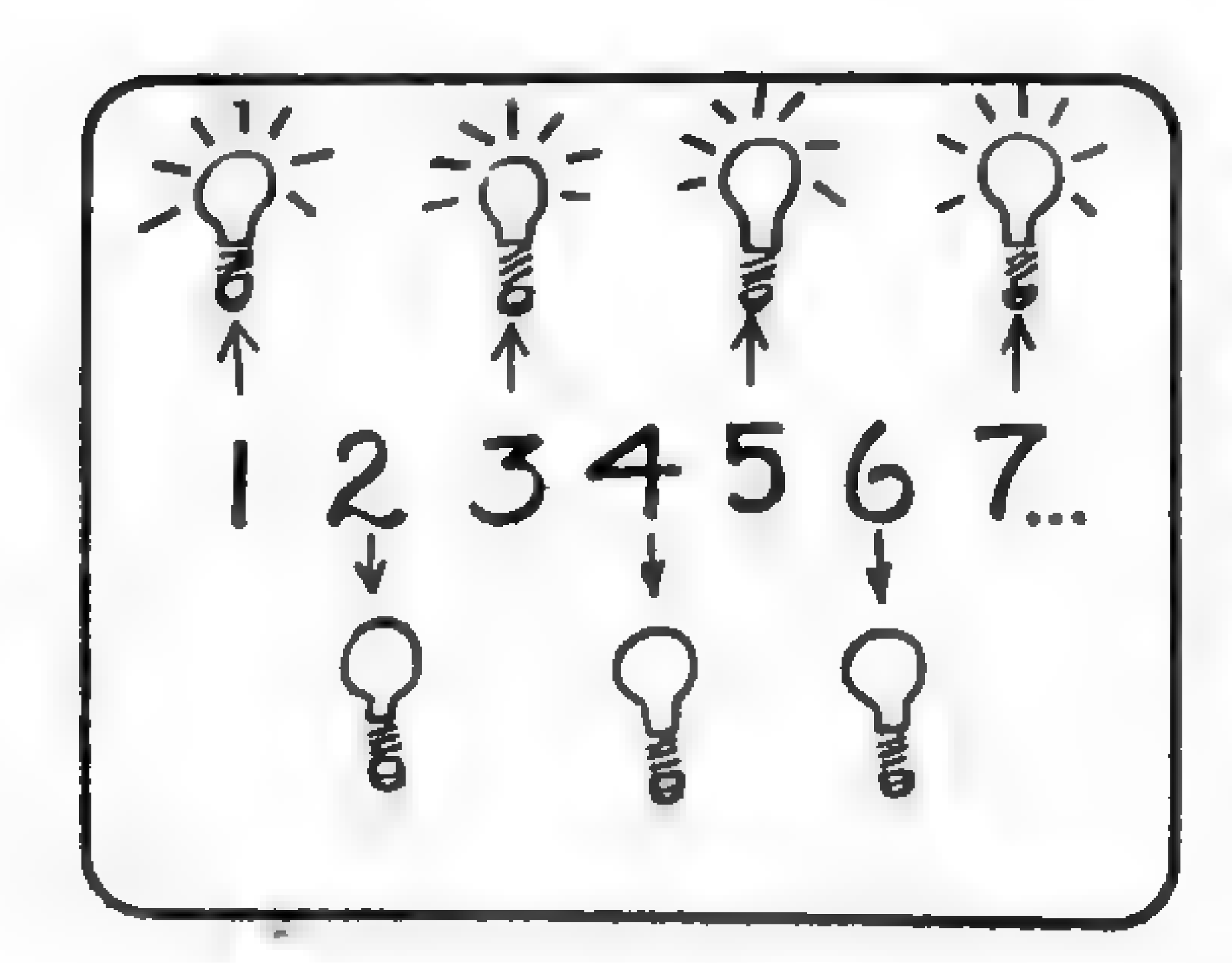


圖3.按鈕單數次燈是亮的，按双次數燈是暗的。如果兩分鐘結束後燈是亮的，表示最後一次按的是單數次；反之則是双數次。可是算不出最後一次是第幾次按鈕。燈不是開的，就是關的，可是沒辦法事先知道是開或是關。

研究科學的哲學家至今對於如何說明像「超級任務」這類的矛盾，至今仍莫衷一是。類似的矛盾都是由所謂的「無限機器」來執行任務的。這個燈的矛盾又稱爲「湯姆遜燈」(Thomson lamp)，因爲是湯姆遜(James F. Thomson)首次提出的。每個人都同意不可能眞正造出一盞「湯姆遜燈」，但這不是重點，重點在：如果我們事先作了一些假設，這盞燈在邏輯上是否可能存在？有人認爲這盞燈是有意義的「思考實驗」(thought experiment)，有人則認爲是胡說一氣。

這個矛盾很令人困擾，因爲在邏輯上看不出有任何理由這盞燈不能完成一個無限連續的開和關過程，就像季諾的跑者一樣。爲什麼這盞燈理想化的開關，不能在正好兩分鐘內以無限次的開和關來結束這段程序？如果這盞燈能做到，那就可證明有個「最後的」可數的數目—可是這根本是無稽之談。

哲學家布萊克(Max Black)以另一種無限機器的形式來說明相同的矛盾，這個機器在一分鐘內把彈珠從A盤轉到B盤，然後在半分鐘內又把B盤轉到A盤，接著在四分之一分鐘內轉到B盤，再在八分之一分鐘內轉到A盤……一直下去。整個程

序在兩分鐘內結束，屆時彈珠在那兒？如果它是在盤中，表示最後一次的數目不是單數就是雙數；可是由於不可能出現最後的數目，所以單數或雙數的可能性也都不存在了。可是如果彈珠不在盤中，那麼它在那兒呢？

時光隧道

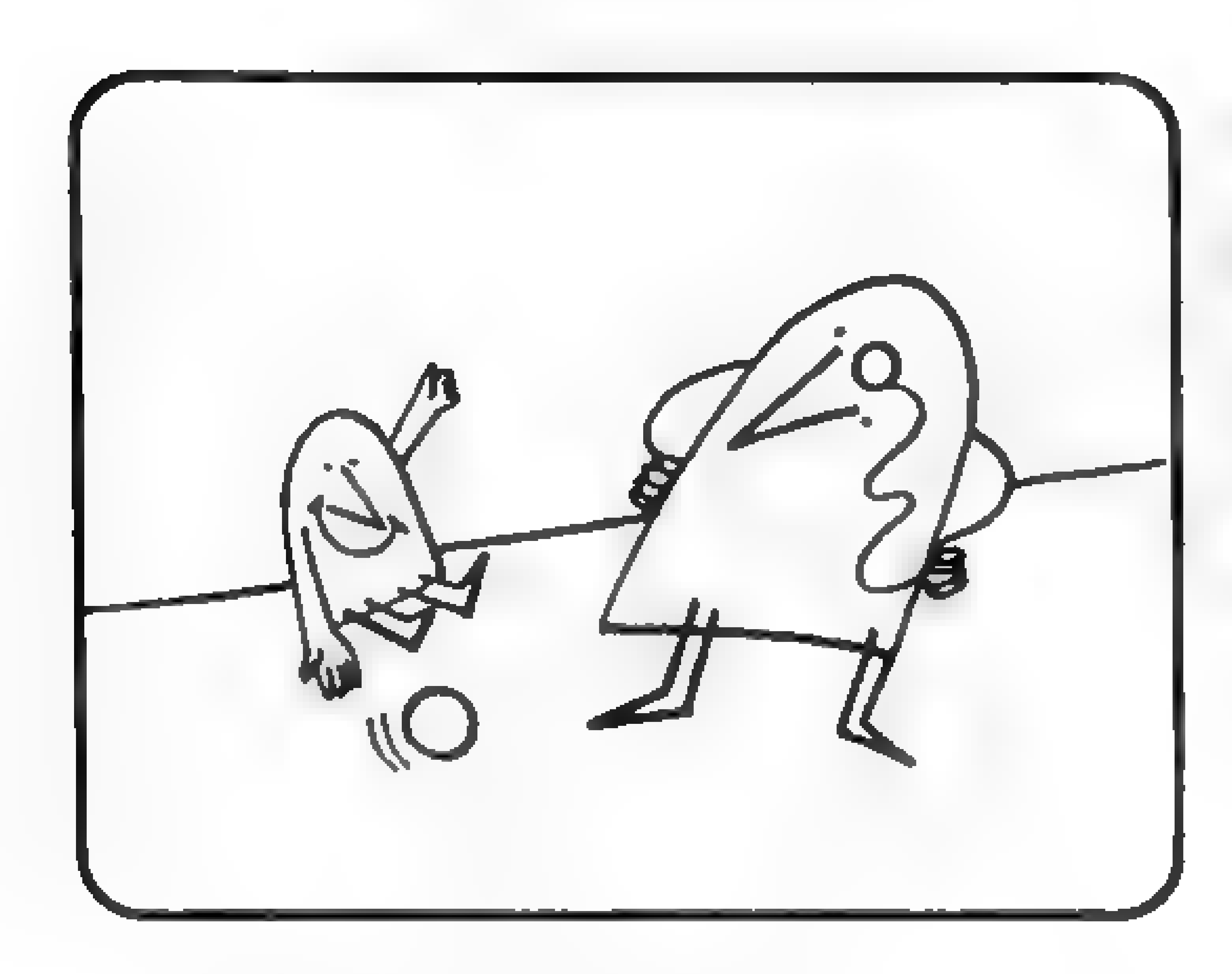


圖1.：布朗教授進入時光隧道，回到三十年前，看到自己還是個嬰兒。布朗：「如果我把這個嬰兒給殺了，那麼往後就不會有布朗教授這號人物。這麼一來，我會突然消失嗎？」

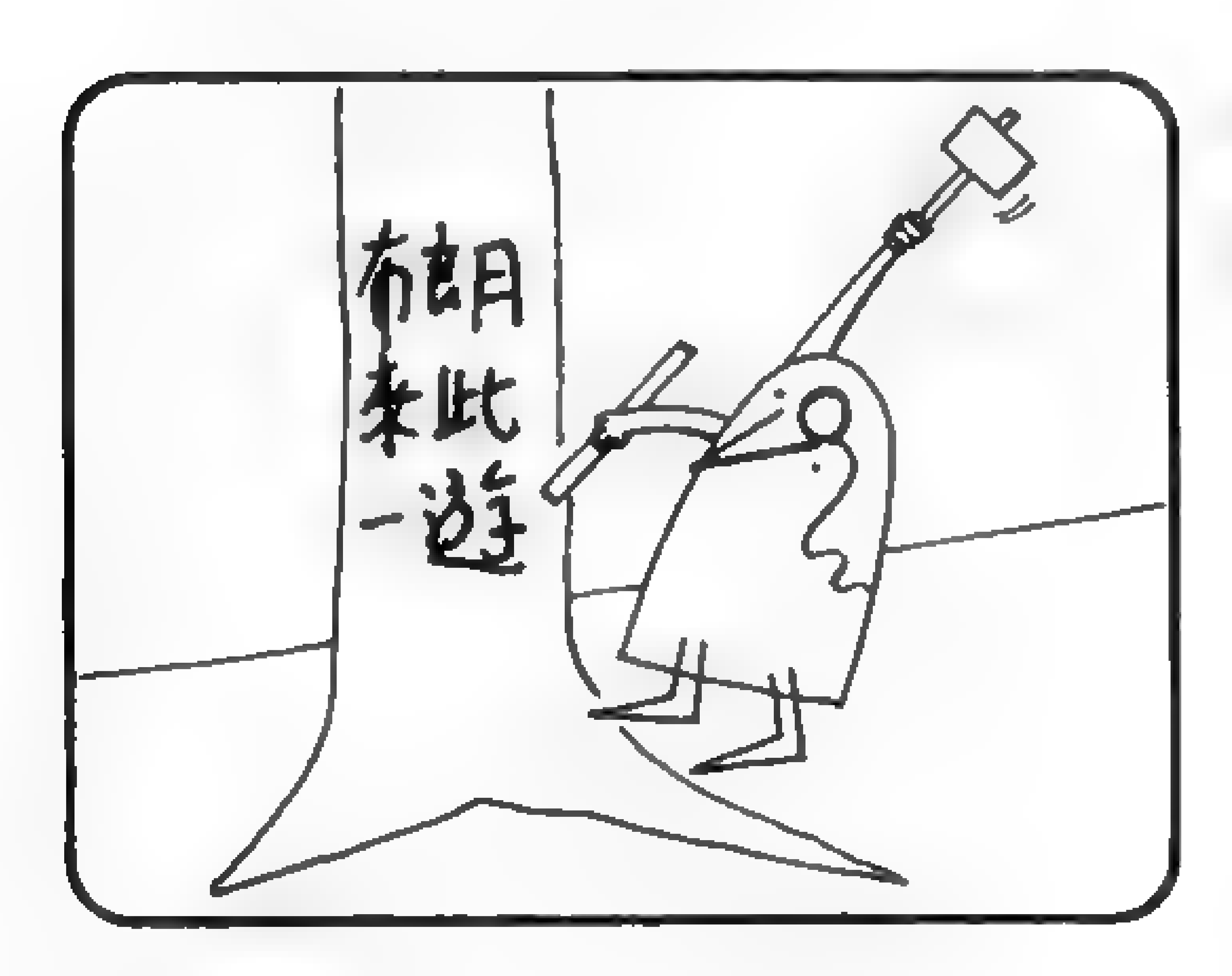


圖2.現在布朗教授又旅行到三十年後的未來，他正把自己的名字刻在實驗室外的一棵橡樹上。

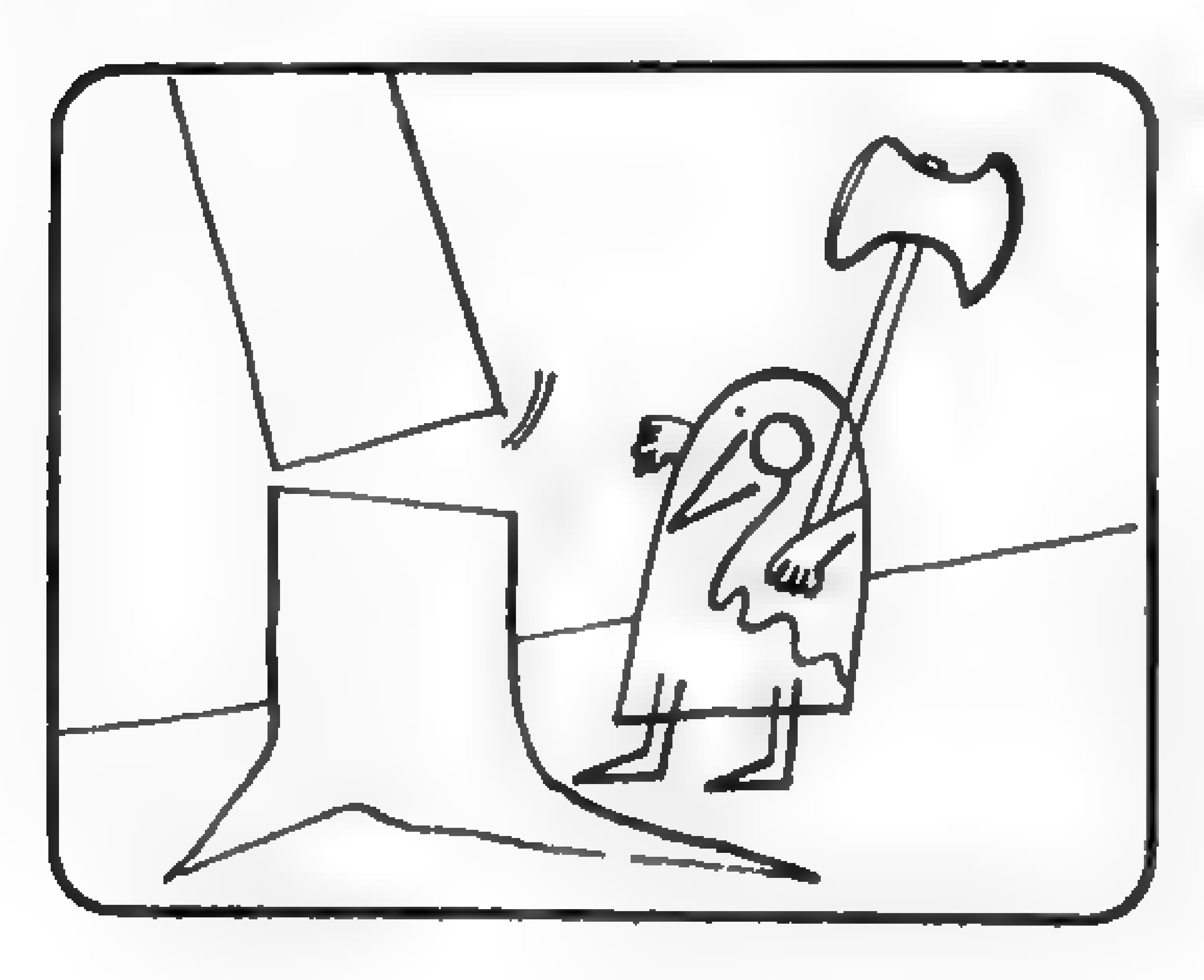


圖3.然後這位教授回到現在，數年後，他決定砍掉那棵橡樹。砍完後，他感到非常迷惑。

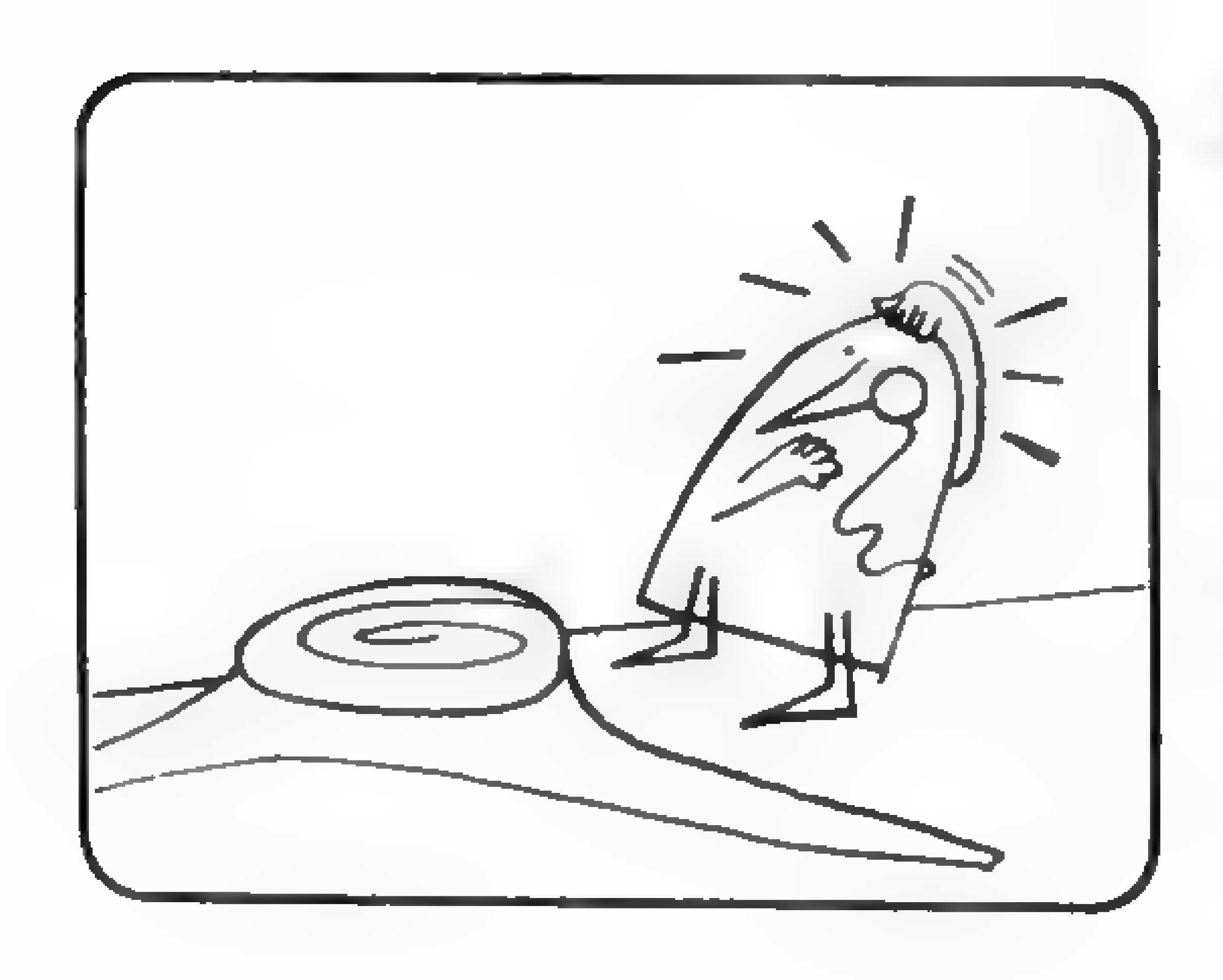


圖4.布朗：「嗯，三年前我進到三十年後的未來，曾把自己的名字刻在這棵橡樹上。那麼，離現在二十七年後，會是怎麼樣的情形？樹已經不在了。可是我原先刻上名字的那棵樹，又是從何而來呢？」

數以百計的科幻小說、電影和電視節目，都描寫時間旅行到過去或未來，魏爾斯(H. G. Wells)的「時間機器」(The Time Machine)是典型的故事。

時光隧道在邏輯上是否有可能，或是會導致矛盾？從本文的矛盾中，很明顯的可以知道，如果我們假設只有一個宇宙，時間一直往前走的話，「想回到過去」會產生很大的邏輯謬誤。先看第一個矛盾，有位時間旅行者回到他的過去，並且看到他自己還是個嬰兒，如果他把這個嬰兒給殺了，他將會既存在又不存在。如果這個以後長大會變成布朗教授的嬰兒被殺了，那麼布朗教授又是從何而來？

第二個矛盾更耐人尋味，布朗教授進入未來，把名字刻在樹上，兩者間並不矛盾。矛盾出在他回到現在—從「未來」的觀點看，他實際上又回到「過去」了—把樹給砍了，未來就不會有這棵樹。所以還是有矛盾：在未來的某段時間裏，這棵樹既存在，又不存在。

平行世界

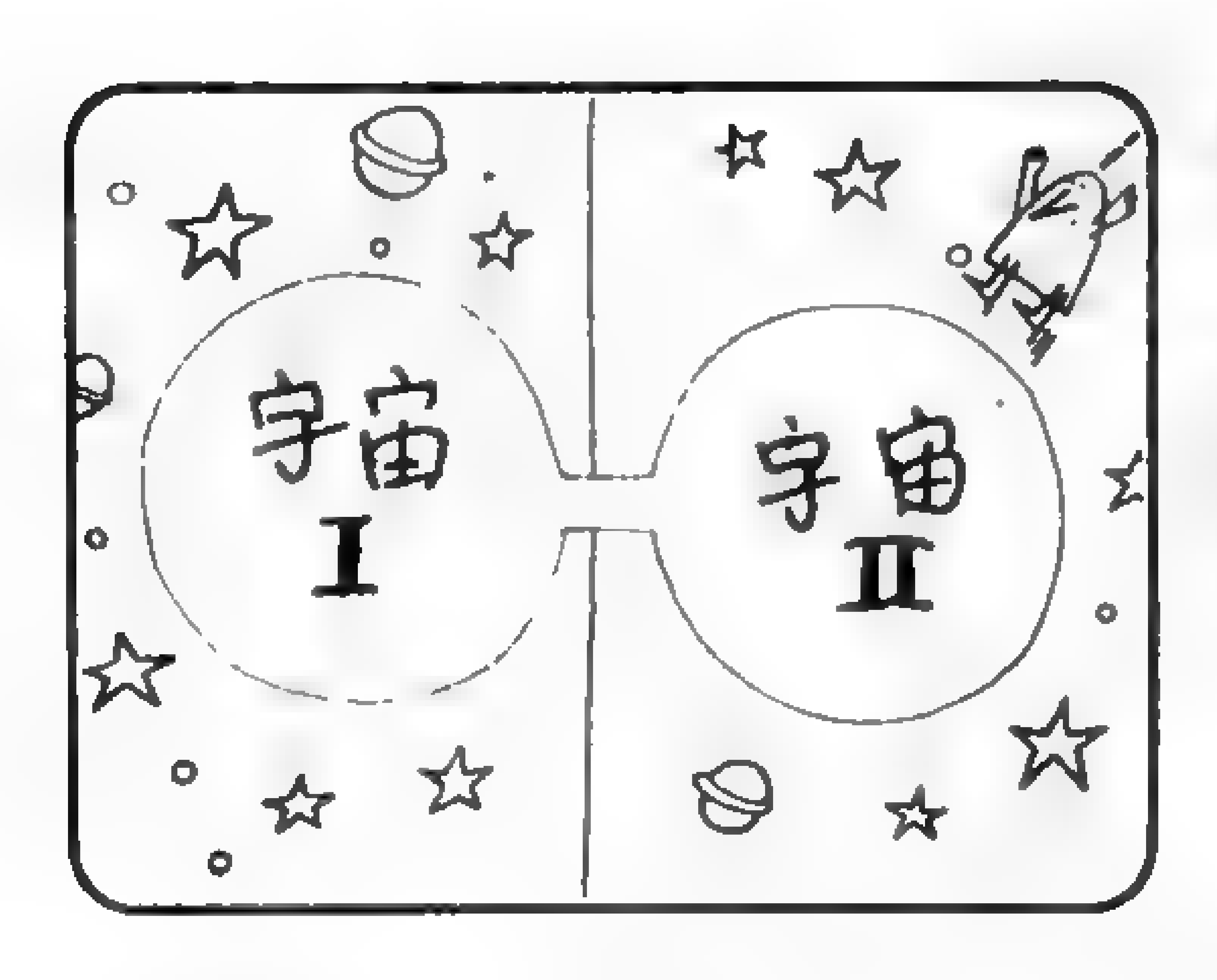


圖1. 寫科幻小說的人想了個妙方，可以避免時間旅行的矛盾。只要有時間旅行者回到過去，他們就想像宇宙會分裂爲完全相同的兩半，每部分各有不同的時空。

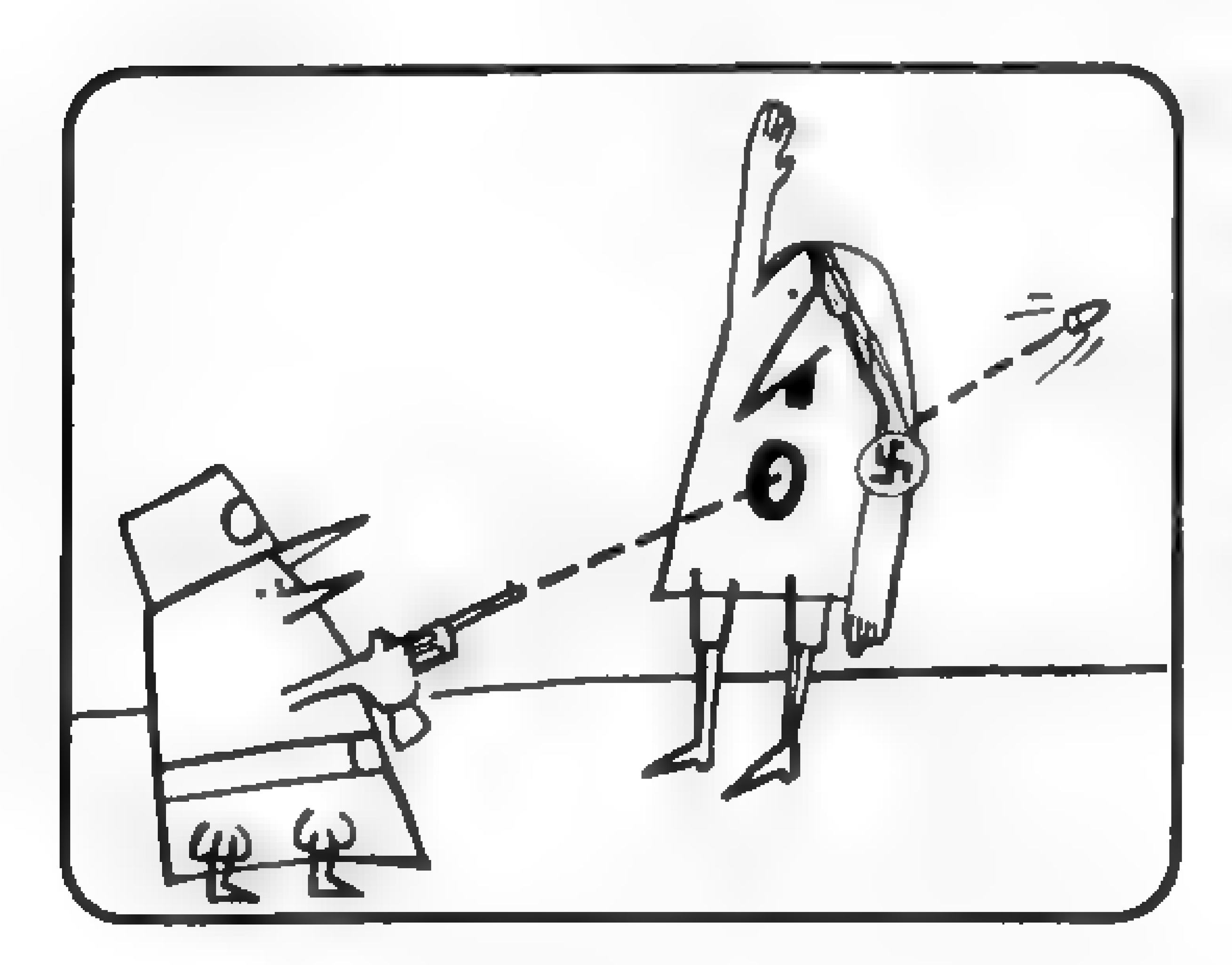


圖2. 它們的運作情形如下：假如你回到一九三〇年，射殺了希特勒(譯註：他原來應死於一九四五年)—上述這件事情一旦發生，宇宙就會分裂成兩個平行世界或時間線(time lines)。

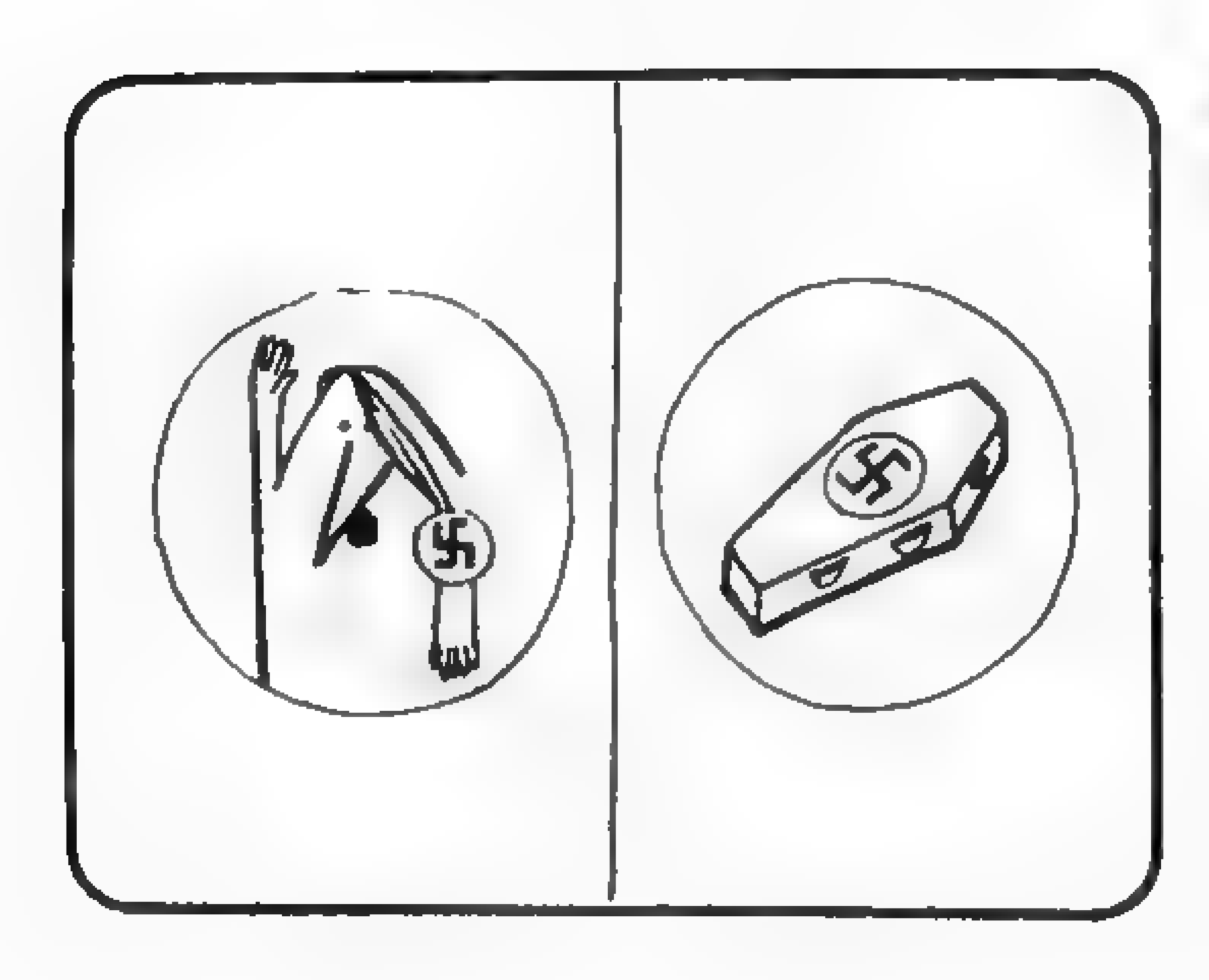


圖3. 宇宙 I 中，希特勒仍活著；宇宙 II 中，希特勒完蛋了。

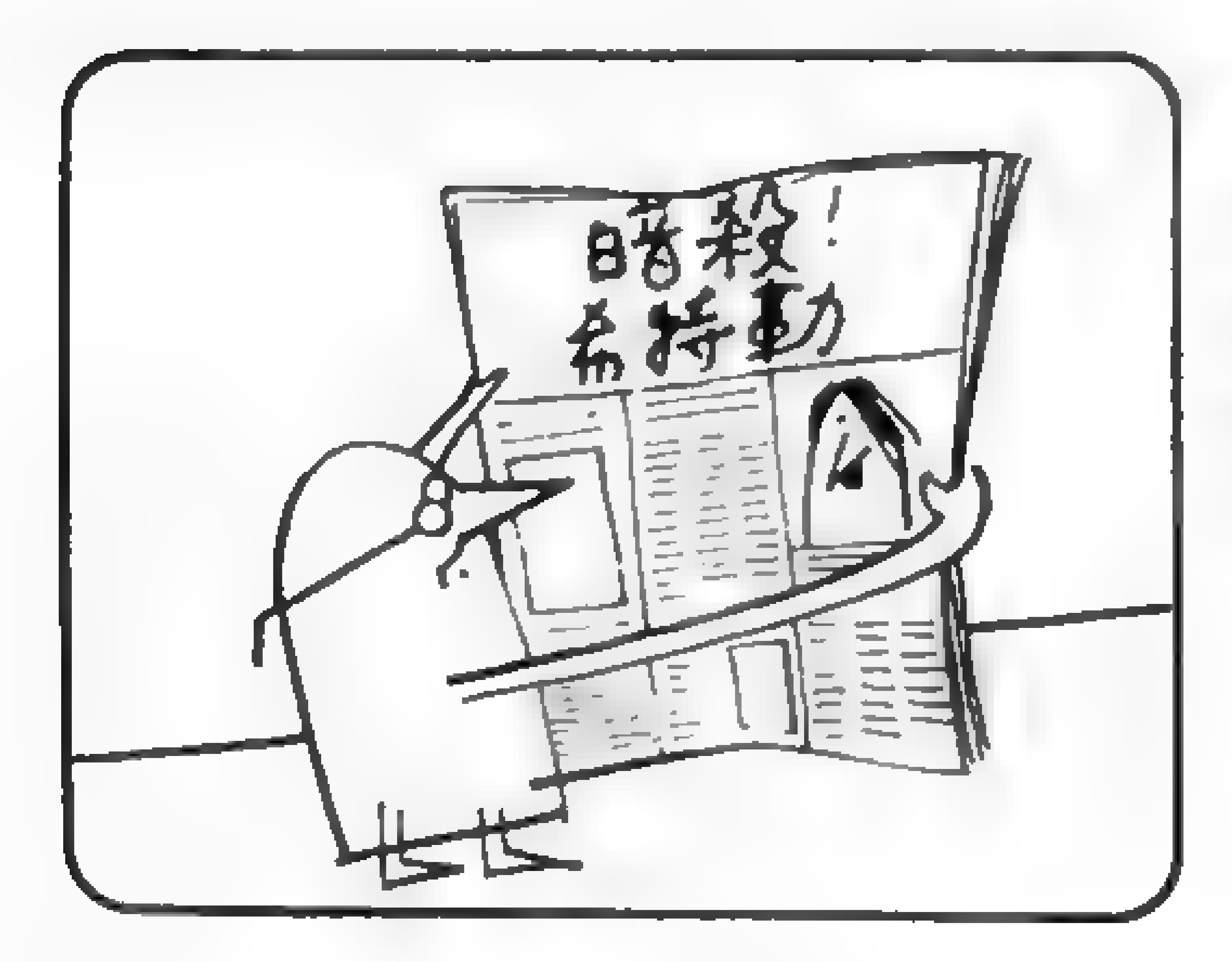


圖4. 如果你回到宇宙II的現代，在舊報紙上會看到希特勒被殺的消息。而你一旦離開了希特勒未被殺的世界，就再也回不去那個世界。

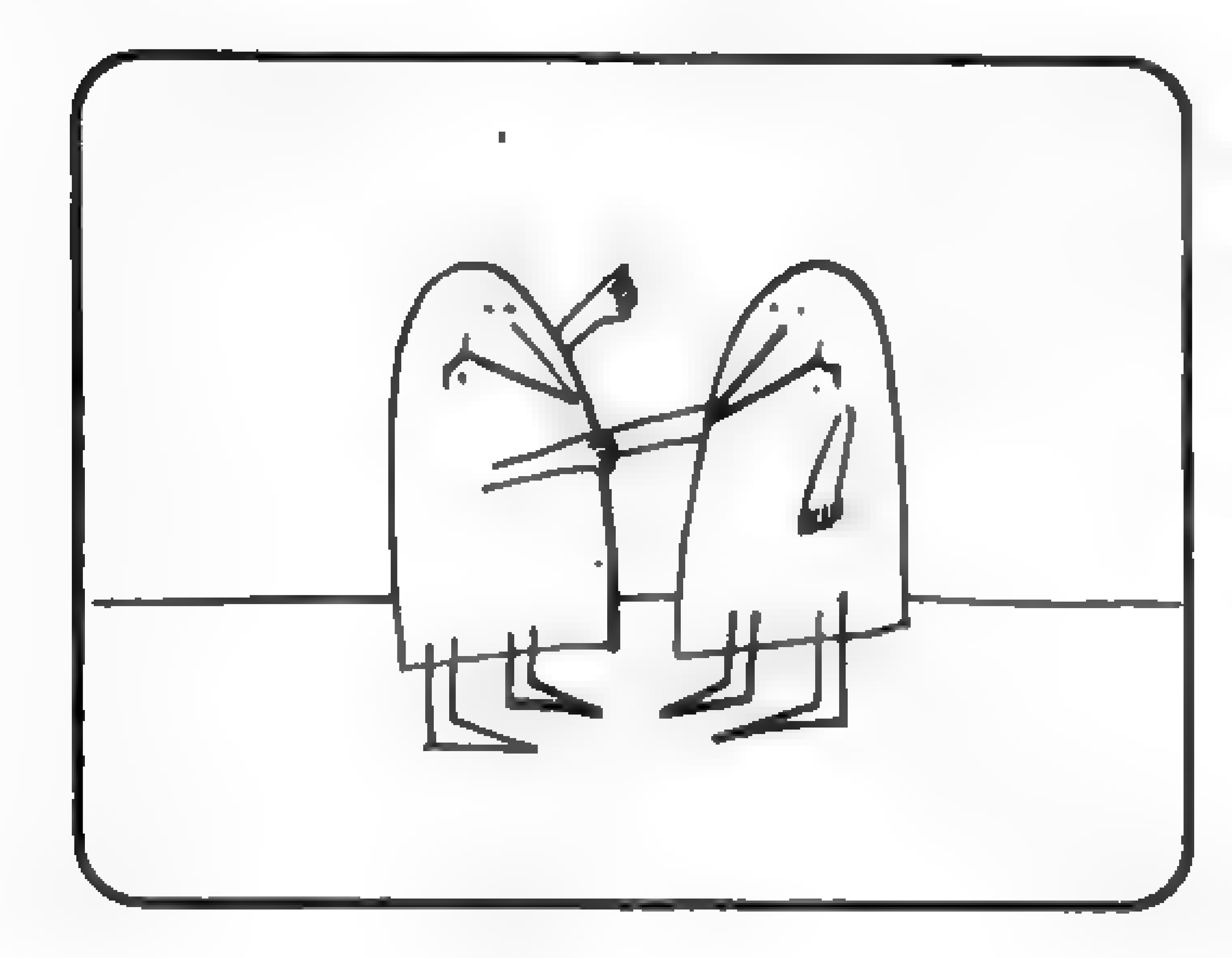


圖5. 這種分叉的宇宙理論會有種種奇怪的可能性。假設多年後，你回到原來的世界和你自己握手：
老費：嗨！老費。
老費：幸會，幸會！老費。

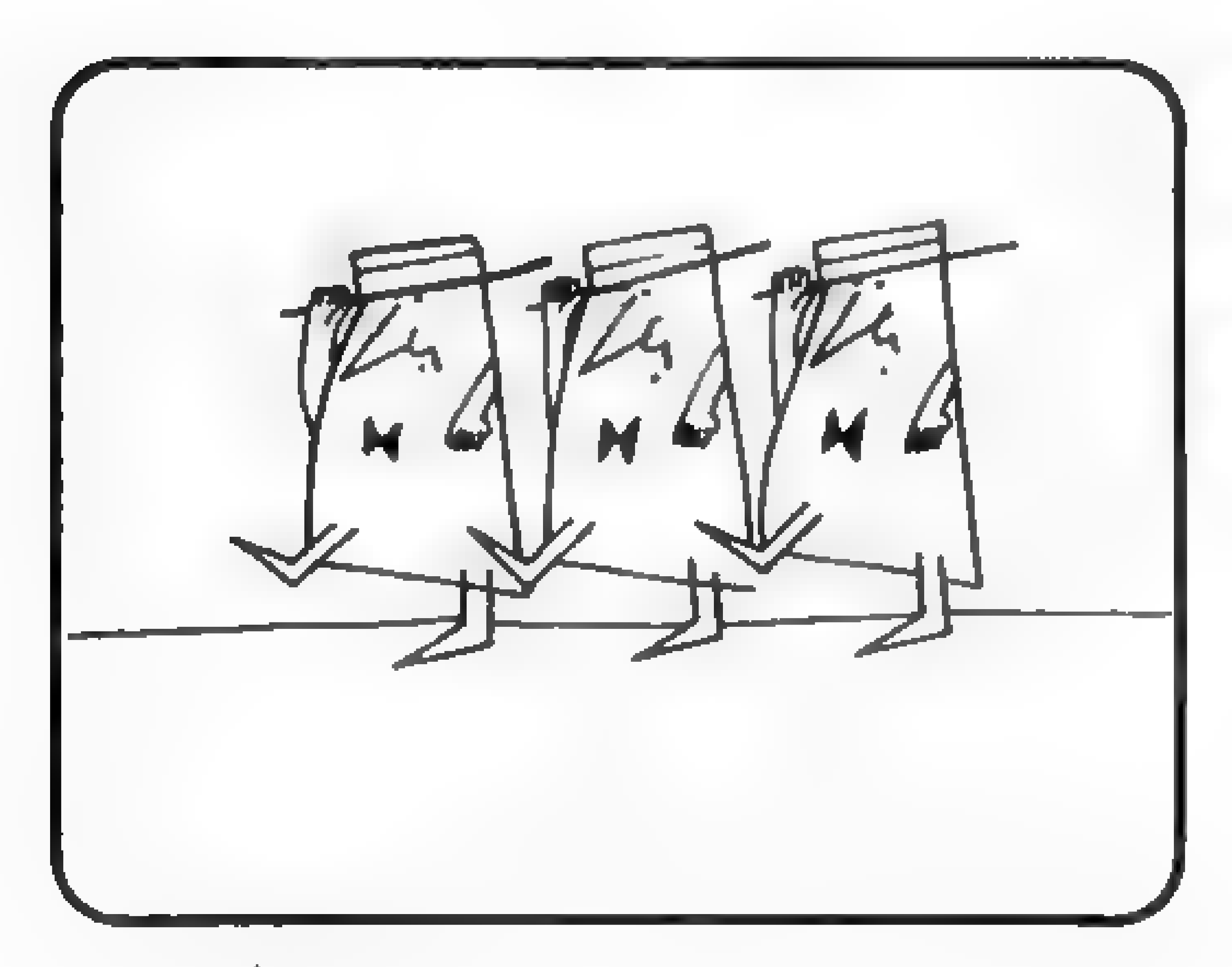


圖6. 往後任何一個「你」，都可以跳進時光隧道中和那「兩個」複製的你見面—如此就有三個老費。只要不斷重複此一過程，要幾百個老費都沒問題。

這整個構想非常的妙，既可時光旅行回到過去，又可避免邏輯上的不合理。其實是寫科幻小說的人先想到這招，有好多科幻小說也都是據此寫出來的。秘訣在於假設只要有人或物回到過去，宇宙就分裂爲平行的世界；如果這種情況眞的可以存在，那麼前面「時光機器」那則故事中，布朗教授（或樹）既存在又不存在的矛盾情況就煙消雲散了。如果眞有平行世界，布朗（或樹）可以存在於這兩個世界中的任何一個。

時間膨脹

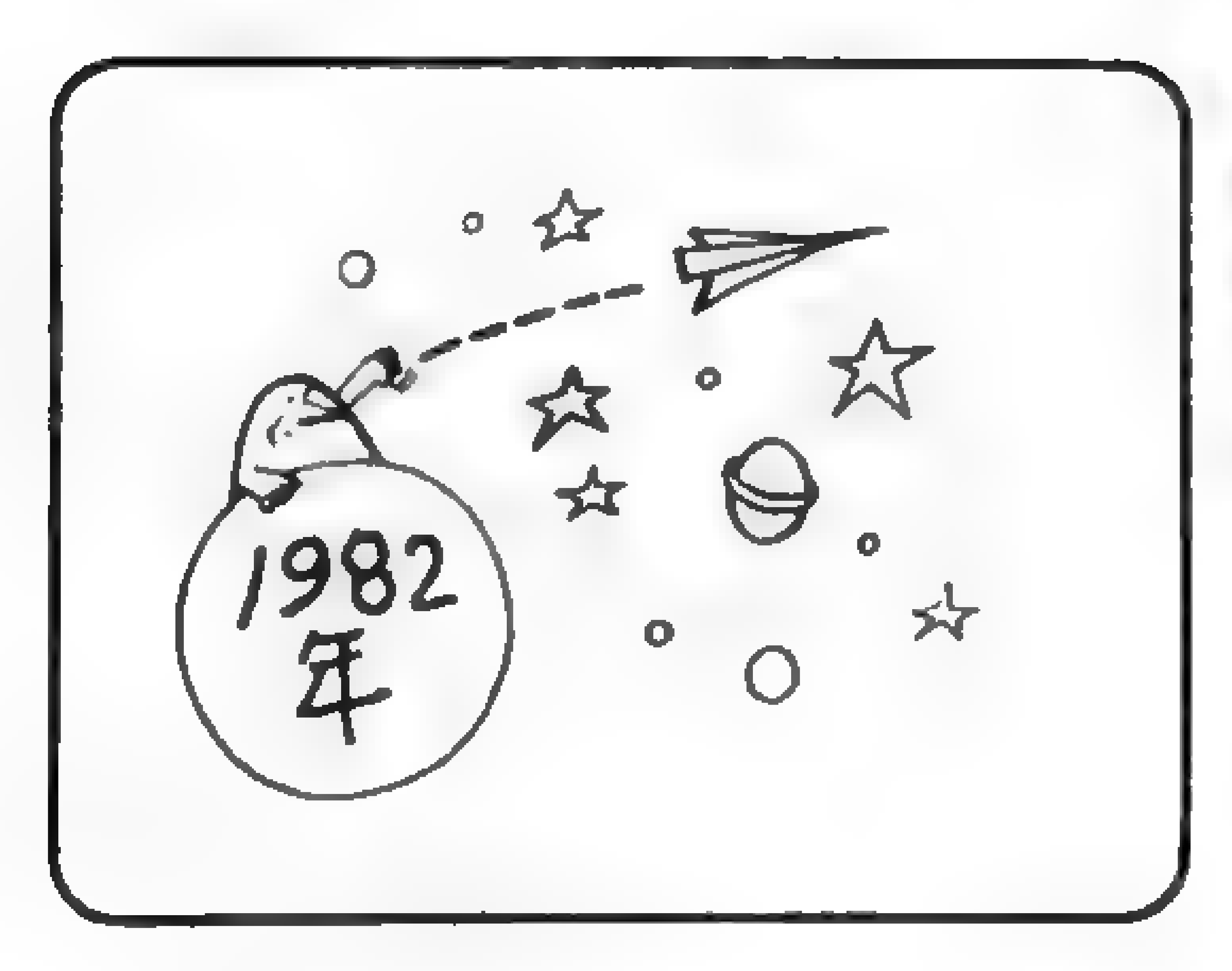


圖1. 回到過去的時光旅行會產生很大的矛盾，所以科學家並不太考慮這個問題。不過，到未來旅行卻又是另一回事。假設太空船以近乎光速的速度遠離地球。

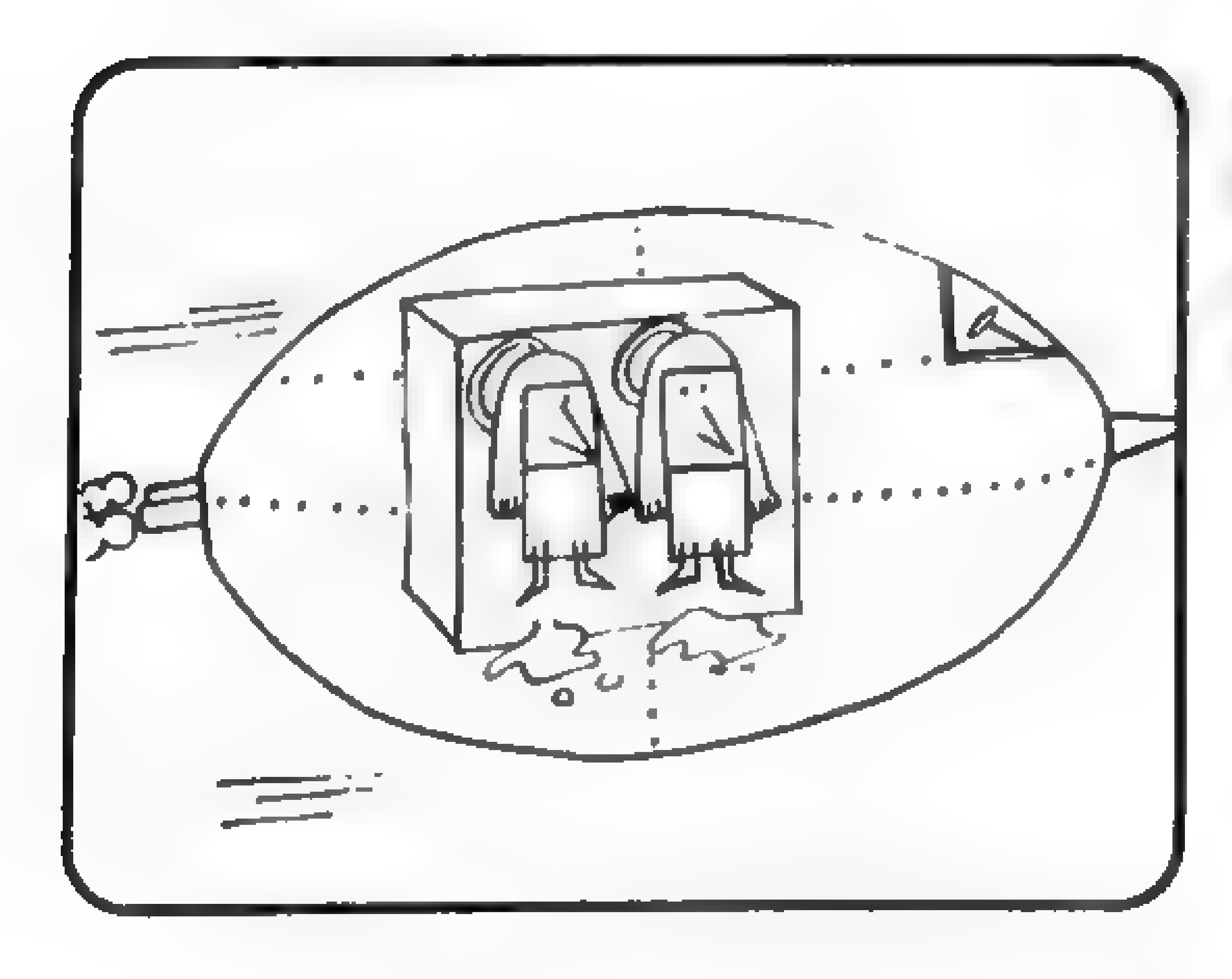


圖2. 太空船走得愈快，時間就走得愈慢。太空船裏的太空人認為時間很正常的走著，可是對我們而言，他們看起來就和不動的雕像沒兩樣。

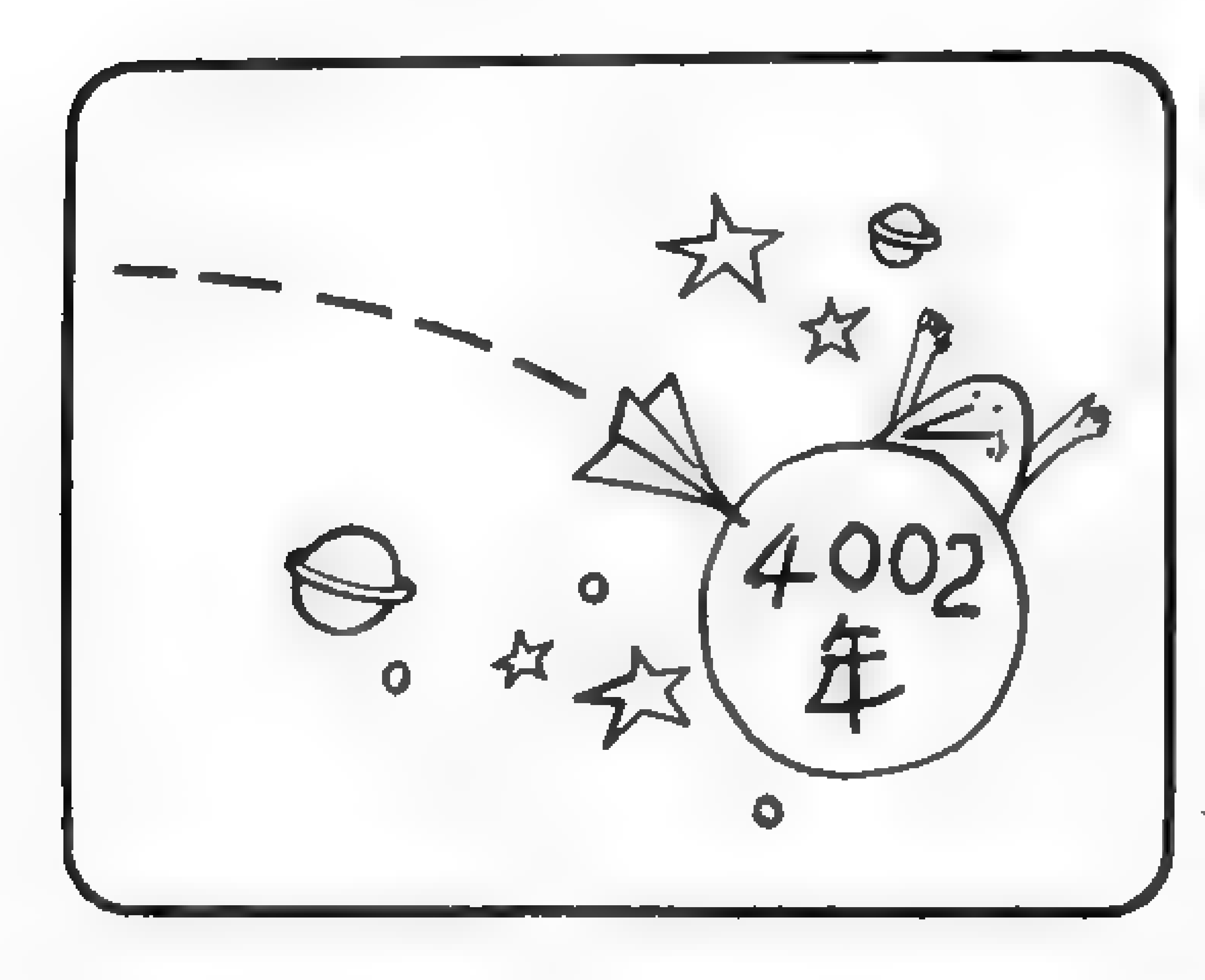


圖3. 太空船飛到一個銀河系後又返回地球。對太空人而言，這趟旅程不過是花費了五年的時間罷了，但是當太空船著陸時，事實上地球已經過了好幾千年了。

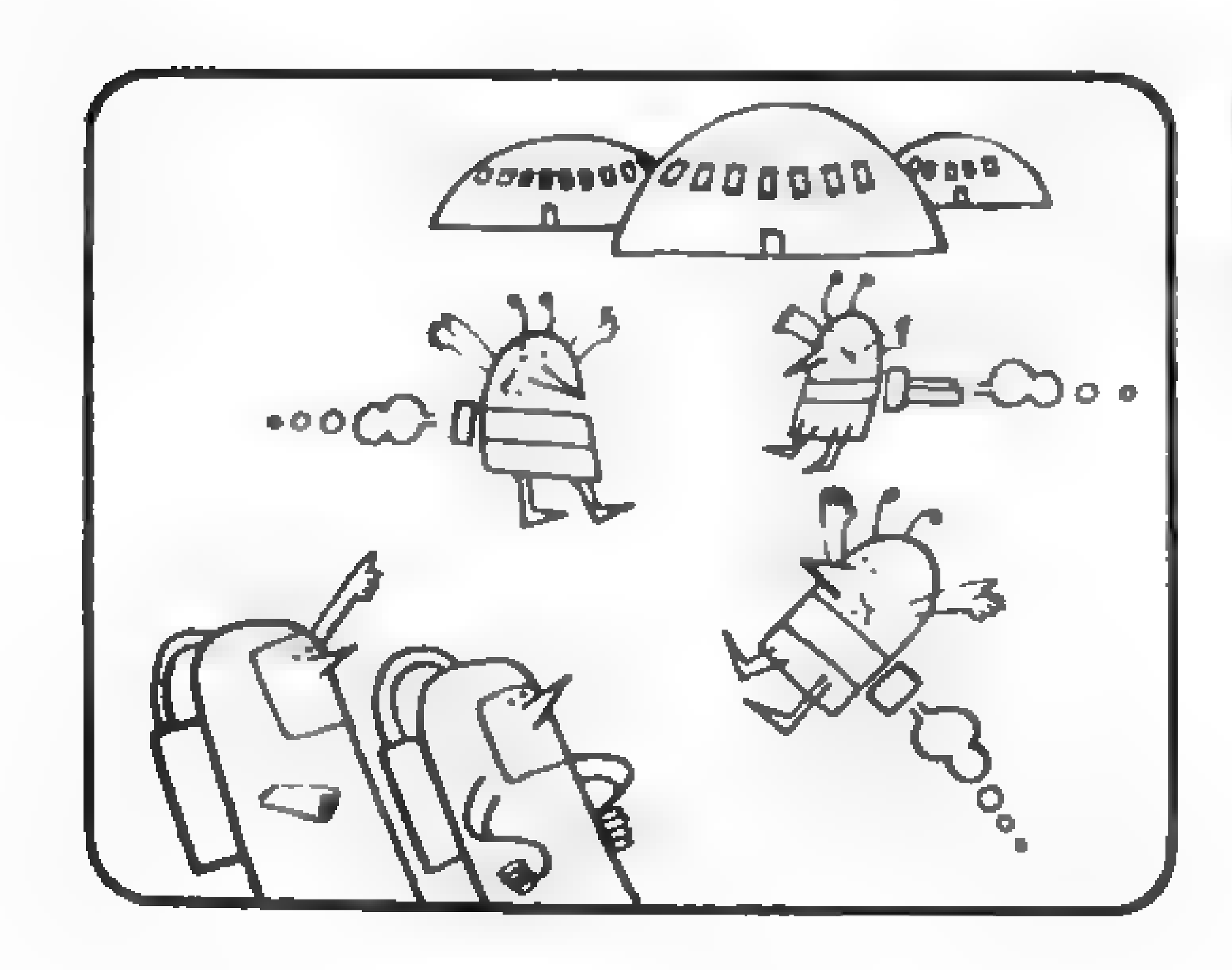


圖4. 這種旅行並未導致任何矛盾，可是此刻太空人已經身陷於地球的未來，而不再能回到過去了。

只有回到過去才會引起矛盾，到未來旅行則不會。事實上，不管你喜歡與否，我們全體都正朝向未來旅行。你晚上睡下時，期待著在不太久的未來（明晨）醒過來。暫停一個人所有活動，然後幾千年後再恢復他的活動，理論上沒什麼不可以，有很多小說描寫這樣的狀況。

愛因斯坦的相對論談及到未來旅行有另一種完全不同的方式，就像卡通片裏演的一樣。根據狹義相對論，一個物體動得愈快，相對於一個靜止的觀察者而言，時間就愈慢。例如，以近乎光速前進的太空船，船上的時間就會比地球上的慢了許多。太空船上的太空人並不覺得有任何異狀。但是如果地球上的人可以看到那些太空人的話，所見到的太空人將會是動作奇緩無比，和雕像沒兩樣。如果反過來，太空人可以看到地球上人的生活，那麼他看到的將是每件事進行起來都快速無比，地球上的一年也不過幾小時一晃就過了。

命運、機會與自由意志

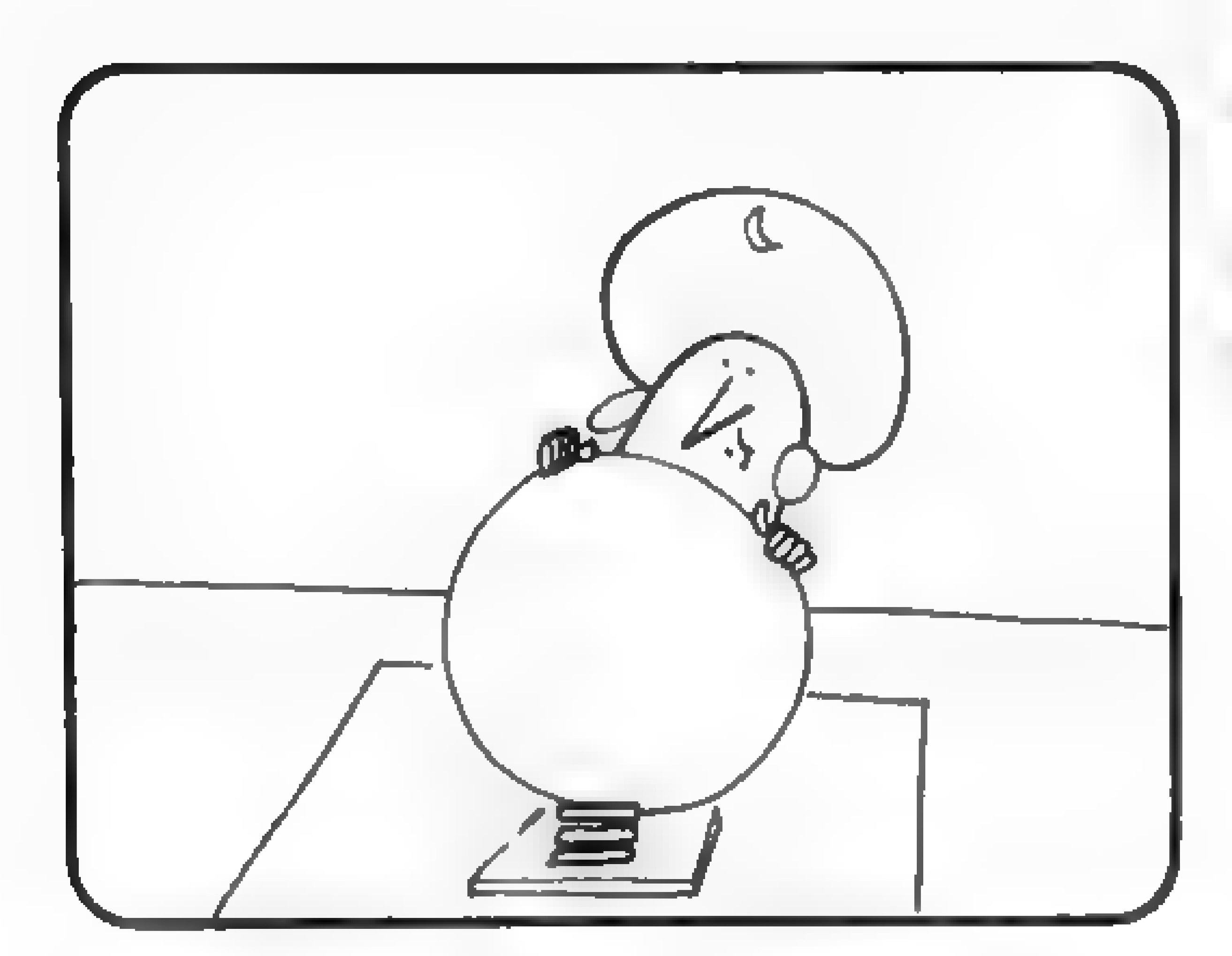


圖1. 雖然物理學家對時間的瞭解愈來愈多，但時間的本質仍是一團迷霧。有一個最大的問題是：我們是否能完全決定未來。

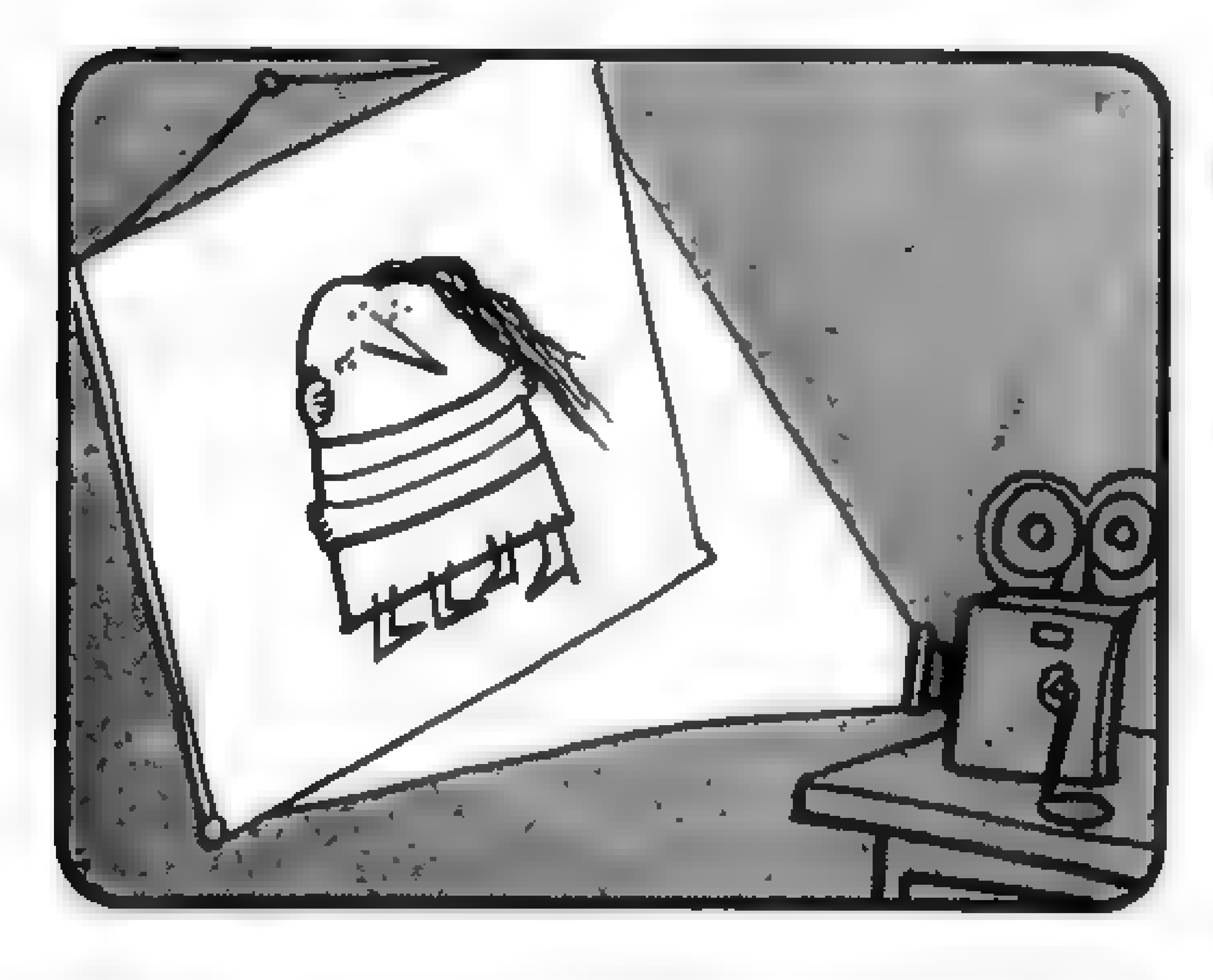


圖2. 決定論者：「會是什麼，就是什麼。人生如戲，我們都是銀幕裏的角色。我們自以爲能主宰自己，其實我們只是在扮演早已被決定的事件罷了。」

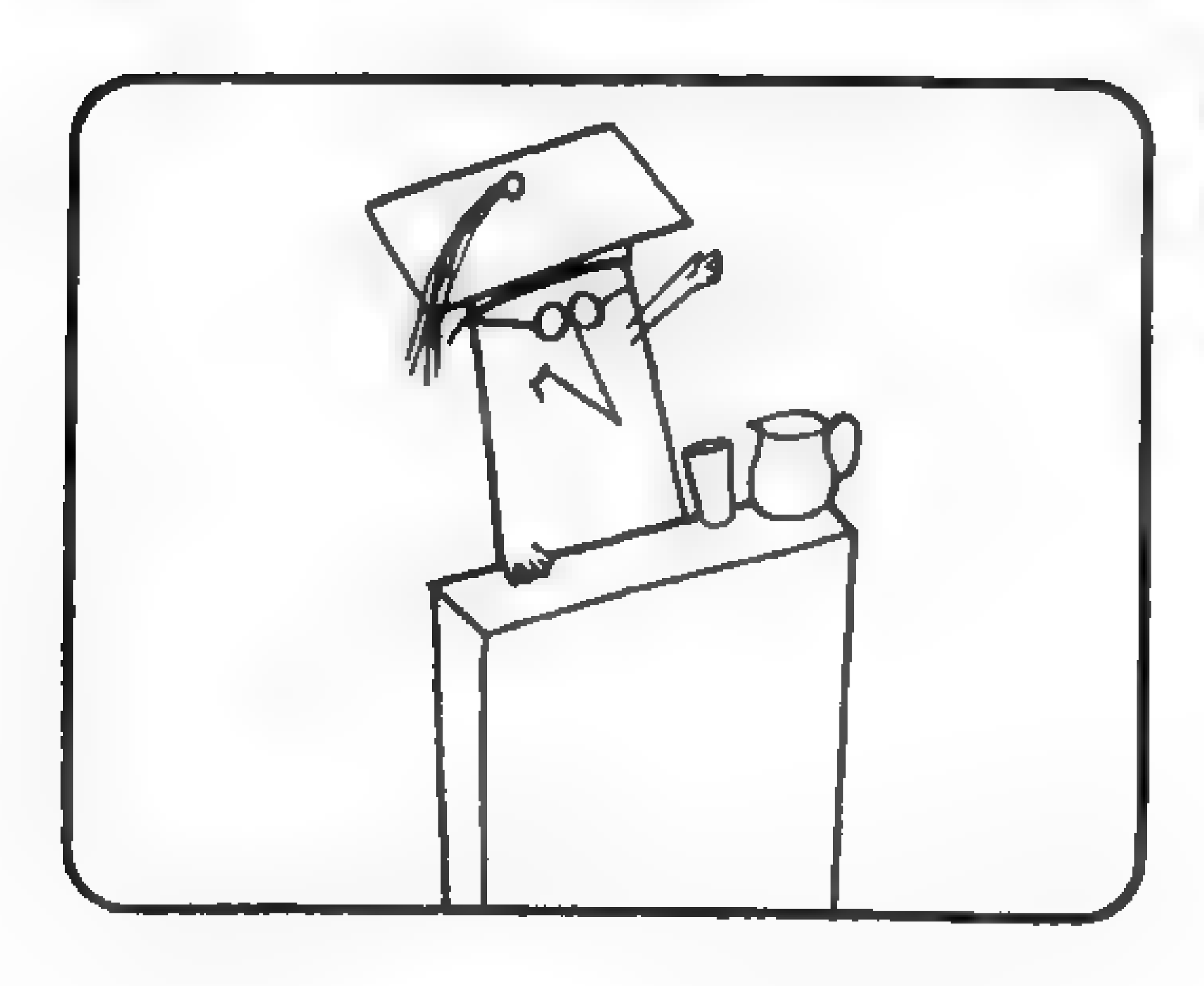


圖3. 非決定論者：「未來只有一部分是被決定好的。我們能運用意志力來改變事情的發展，歷史由許多意想不到的事所構成的。」

對於過去是否完全主宰未來的發展，科學家、哲學家和一般人都有不同意見。決定論者相信宇宙中任何時刻的狀態，就完全決定了未來任何時刻的狀態，愛因斯坦就這麼認爲。因爲有一位擁護決定論的大哲學史賓諾沙(Benedict de Spinoza)，而愛因斯坦就自稱他自己是史賓諾沙派的。這也解釋了爲何愛因斯坦根本不願接受量子論爲最終眞理，因爲量子論是站在微觀(microlevel)的層次上，強調機會是決定事件發生的基本因素。愛因斯坦就說過：「我不相信上帝是用擲骰子來安排宇宙的。」

非決定論者認爲未來只能被一部分的現在所決定。一個人無需相信自由意志，他只要相信從微觀的觀點來看，機會至少使得未來不會全然爲過去所決定。此外，他也可以相信說生物（尤其是人類）擁有「自由意志」，能夠大幅地改變未來，即使有一位對目前宇宙瞭若指掌的超人類也無法預測未來的發展。有兩位著名的美籍哲學家—皮爾斯(Charles Peirce，一八三九～一九一四) 和詹姆士(William James，一八四二～一九一〇) 卽贊成此說。

以上這些深刻的哲學問題與時間的本質，和「一件事導致另一件事發生」二者

之間有密切的關係。不可否認的，把數學應用在測量宇宙的現象上，是很可以精確地預測一些事情，例如下一次日蝕的時間。但是也無人否認，有些事情無法做精確的預測，因爲導因太過複雜，例如骰子下次會出現的數字或下個星期的天氣。

現在最大的問題在於宇宙法則是完全被決定的呢？或者一個全新事物的產生，是完全偶然的機會（微觀層次）？抑或是由生物的自由意志所決定（巨觀層次）？這個問題自古以來就爲古希臘人、科學家、哲學家以及每一個人所爭論不休。

CB100

創世紀

保羅・甘迺迪 著 顧淑馨 譯

●定價三二〇元

人類的歷史總是受到三種動力的影響：人口的增長和遷徙、自然環境的限制和機會，以及新科技的突破。在二十一世紀，這三種動力將如何左右人類的前途？人類又面臨哪些挑戰？全球各地區或國家各該如何準備，以迎接新世紀的來臨？世界知名的歷史學家保羅・甘迺迪在本書中對這些問題一一深入分析，不但深具學術智慧，見解亦發人深省。

在二十一世紀，人類究竟會走上毀滅的道路抑或再創黃金時代？選擇權就在我們自己手上。而我們怎麼選擇，就說明了人類是怎樣的一種生物！

CB099

跳躍的靈魂

——「美體小舖」安妮塔傳奇

安妮塔・羅迪克 著 黃孝如 譯

●定價二八〇元

丈夫離家，兩個幼女嗷嗷待哺，安妮塔想到開一家小店，只爲了養活她們母女三人。孰料這個小店在十七年的費心經營後，成爲分布全球四十二個國家，共開設九百多家分店的跨國性企業。她究竟如何做到？

「跳躍的靈魂——『美體小舖』安妮塔傳奇」是英國美體小舖創辦人安妮塔・羅迪克，以自白的方式寫成的傳記。書中除了追溯她的成長經驗，對於她如何以「獨特」的方式經營企業，有精采而詳盡的描述。

安妮塔的「獨特」，不在於利潤，在於她深信企業除了賺錢，應保持原則，不必喪失靈魂。她落實而積極的投入環保、人權等社會運動，並幫助第三世界人民擁有謀生能力。

從安妮塔身上，讀者看到的不只是成功的企業典範，她那自由、熱情、勇敢、前衛的人格特質，將帶給您極大的震撼。

CB098

追求卓越

畢德士、華特曼 著 天下編譯

●定價二二〇元

商業掛帥的大潮流中，「企業」是維繫社會生存、推動人類多元化經濟發展的主角。到底企業該如何經營管理，才能永續發展屹立不墜？方法和招術可說是五花八門、難以盡數，不僅管理上的理論推陳出新，戰略上更是琳琅滿目，無奇不有；但追根究柢，成功的原則仍然有跡可循。

本書所提供的管理八大原則，正是兩位作者抽絲剝繭、苦心研究，從六十二家企業經營的模範樣本中所萃取出來的。它强調：以價值觀統馭公司上下，使全體員工一致認同並身體力行。管理上著重採取行動、充分授權、重視員工、精簡組織、寬嚴並濟；策略上則顧客至上，謹守內行，不盲目投資其他事業。這些原則貌不驚人，但卻是企業經營歷久不衰的不二法門。

CB097

溫柔女强人

羅絲曼 著　余佩珊 譯

●定價二二〇元

九〇年代國際商業環境變幻莫測，全球儼然成爲一個競爭白熱的戰場。由於女性意識覺醒加上教育素質提高，職業女性將成爲戰場上潛力雄厚的新尖兵。

本書即是爲了已身處國際商業氛圍，或蓄勢打入全球商圈的職業女性所寫。分爲「暖身」、「蒐集資訊」、「親身投入」、「成功的見證」等部分。

書中指出，未來我們將會見到傳統和現代男性的角色共冶一爐。不過最重要的是，男女雙方將有更多選擇機會。儘管大多數男性都將繼續扮演傳統的性別角色，他們也有機會不受傳統拘束。

作者羅絲曼强調女性堅忍、體諒、敏銳等特質，是國際商場中的致勝武器。在叱咤商界的同時，如何擁有愛情、婚姻、家庭、休閒、健康等，也是新一代職業女性的渴望，本書提供了深刻啓發及實用指南。

CB095

吳舜文傳

溫曼英 著

●定價三二〇元

掌控二十三家公司的裕隆企業集團領導人吳舜文，是中國惟一橫跨紡織、汽車工業的女性工業家；也是教育家，她創辦新埔工專，任職東吳、政大……春風化雨二十餘年。

「吳舜文傳」作者溫曼英，擁有十五年的新聞採訪歷練，採訪領域橫跨財經、社會。爲了撰寫本書，她整整花了兩年時間和吳舜文固定會面相敘，並閱讀大量剪報資料；甚至飛到大陸彼岸，採訪相關人士，追尋吳舜文八十載的生活真貌。

透過作者銳利而帶感情的筆，讀者將能細細領悟吳舜文如何轉換多種角色、如何克服人生不同挑戰的處世哲學。

CB094

綠色企業

——永續經營新趨勢

戴維斯 著　宋偉航 譯

●定價二二〇元

本書從環保精神中，導出企業追求永續生命的新趨勢。對現代企業領袖或經理人而言，他們最大的挑戰有二：一是如何爲企業奠下百年根基，永續發展下去；二是全球環保意識的高漲，使得企業人士必須兼顧自體的發展和外在環境的維護、改善。這都意味著企業經營的理念必須改弦更張——由以貨幣爲目標的「消費取向」，轉變爲以人爲中心的「保育取向」。

作者以畢生的智慧與經驗，淬鍊出「以人爲尊」的經營哲學。墨守成規的管理組織與管理模式，早已不敷時代所需。企業必須採取新的管理方式，才能在瞬息萬變的環境中，脫穎而出。這些新的經營理念，包括靈活的工作組織、協力合作的管理風格、公平的所有制、恰如其分的經營規模、系統化的技術要求、耐久的品質、共存共榮的遊戲規則等。

天下文化〈天下人知識系列〉

書號	書　名	作者	譯者	定價	備註
BK001	跳出思路的陷阱	葛登能	薛美珍	150	
BK002	帝王學	山本七平	周君銓	150	
BK003	如何看財務報表	波席爾	王修木	150	
BK004	輕輕鬆鬆學經濟	肯爾、拉羅	陳文苓	150	
BK005	共同基金	陳忠慶		150	
BK006	房地產－增殖的投資途徑	游振輝		150	
BK007	創意激盪	羅林森	黃炎媛	180	
BK008	啊哈！有趣的推理	葛登能	薛美珍	280	
BK009	進入廣告天地	紀文鳳		180	
BK3001	風格領導	藍迪	李宛蓉	140	
BK3005	管理金鑰	崔西	黃美姝	140	
BK3006	用筆溝通	杜梅	王偉民	140	
BK3007	說上巔峰	奧斯本	徐曉慧	140	
BK3008	飛越競爭	徐木蘭		140	

天下文化〈天下經典系列〉

書號	書　名	作者	譯者	定價	備註
BA002	自由經濟的魅力	李甫基	馬凱　等	320	
BA003	台灣經驗四十年	高希均、李誠編		400	
BA004	新領導力	葛德納	譚家瑜	300	
BA005	新政府運動	歐斯本　等	劉毓玲	300	
BA006	台灣二〇〇〇年	蕭新煌　等		320	
BA007	不再寂靜的春天	彌爾布雷斯	鄭曉時	500	
BA008	綠色希望	席塔茲	林文政	320	
BA009	台灣經驗再定位	高希均、李誠編		500	

書號	書名	作者	譯者	定價	備註
CB107	發展型管理	萊森	周旭華	280	
CB108	全品質經理人	帕瑞克	陳秋美	220	
CB109	統合管理革命	格蕾安	陳秋美	260	
CB110	資訊地球村	增田米二	游琬娟	240	
CB111	第五項修練—學習型組織的藝術與實務	彼得・聖吉	郭進隆	500	
CB112	優勢行銷	拉瑟 等	周旭華	250	
CB113	實現創業的夢想	霍肯	吳程遠 等	220	
CB114	溝通時代話領導	狄倫施耐德	余佩珊	280	
CB115	全球弔詭—小而強的年代	奈思比	顧淑馨	320	
CB116	共創企業淨土	徐木蘭		250	
CB117	台商經驗—投資大陸的現場報導	高希均 等		320	
CB118	新競爭時代的經營策略	高清愿 等		500	
CB119	時間萬歲—解讀忙碌症候羣	伯恩斯	莊勝雄	280	
CB120	飛狐行動——個團隊致勝的故事	巴特曼	施惠薰	280	
CB121	團隊出擊	哈琳頓-麥金	齊若蘭	260	
CB122	綠色管理手册	沙德葛洛夫	宋偉航	360	
CB123	覺醒的年代—解讀弔詭新未來	韓第	周旭華	300	
CB124	第五項修練Ⅱ實踐篇(上)—思考、演練與超越	彼得・聖吉 等	齊若蘭	460	
CB125	第五項修練Ⅱ實踐篇(下)—共創學習新經驗	彼得・聖吉 等	齊若蘭	460	
CB126	我看英代爾—華裔副總裁的現身說法	虞有澄 等		360	
CB127	個人公關	蘿安	李淑嫻	240	
CB128	公關高手—經營人際關係的藝術	蘿安	李淑嫻	240	
CB129	不流淚的品管	克勞斯比	陳怡芬	280	
CB130	電腦王國R.O.C.—Republic of Computers的傳奇	黄欽勇		280	
CB131	數位革命—0110111001011101 11…的奧妙	尼葛洛龐帝	齊若蘭	320	
CB132	創意成真——十四種成功商品的故事	拿雅克 等	譚家瑜	360	

國外訂購價格（含郵費）

航空／歐、美、日等地區　定價×1.8

　　香港、澳門　定價×1.6

水陸／歐、美、日等地區　定價×1.6

　　香港、澳門　定價×1.4

- 購買總金額在新台幣1000元（含1000元）以下者，請加付手續費新台幣200元。
- 請以美金支票付款，支票抬頭請開Commonwealth Publishing Co., Ltd.。
- NT.$25.00＝US.$1.00。

天下文化〈財經企管系列〉

書號	書　　名	作者	譯者	定價	備註
CB049	做個高附加值的現代人	高希均		180	
CB053	歷練—張國安自傳	張國安		200	
CB055	麥當勞—探索金拱門的奇蹟	洛夫	韓定國	200	
CB056	工作與信仰—台灣經濟社會發展的見證	李國鼎		200	
CB057	我們不能再等待	趙耀東		200	
CB058	廣告大師奧格威—未公諸於世的選集	奧格威	莊淑芬	200	
CB061	服務業的經營策略	海斯凱特	王克捷　等	200	
CB063	再創高峯—成功者如何超越失敗	海耶特　等	黃孝如	200	
CB064	攻心爲上—活用的商場智慧	麥凱	曾陽晴	200	
CB065	說來自在—上台演講不緊張	薩娜芙	金玉梅	160	
CB066	股市陷阱88—掌握投資心理因素	巴瑞克	陳延元	200	
CB069	投資美國—外資如何改變美國面貌	陶泰夫婦	周天瑋	200	
CB077	2000年大趨勢	奈思比　等	尹　萍	250	
CB078	150年行銷戰—寶鹼公司贏的策略	廣告年代編	邱秀莉	220	
CB081	個人趨勢家	史蘭特　等	薛美珍　等	250	
CB082	談笑用兵—洞悉商場策略	麥凱	鄭懷超　等	220	
CB083	改造遊戲規則—21世紀銷售新法	魏爾生	孫紹成	220	
CB084	經驗與信仰	李國鼎		200	
CB085	平凡的勇者	趙耀東		200	
CB086	哈佛仍然學不到的經營策略	麥考梅克	劉毓玲	220	
CB087	未來贏家—掌握2000年十大經營趨勢	塔克爾	賓靜蓀	220	
CB089	世紀之爭—競逐全球新霸主	梭羅	顧淑馨	250	
CB090	躍升中的四小龍	傅高義	賈士蘅	180	
CB091	台灣突破—兩岸經貿追蹤	高希均　等		320	
CB092	超國界奇兵	薫伊　等	李淑嫻	200	
CB093	無限影響力—公關的藝術	狄倫施耐德	賈士蘅	250	
CB095	吳舜文傳	溫曼英		320	
CB096	經營顧客心	懷特利	董更生	240	
CB097	溫柔女強人	羅絲曼	余佩珊	220	
CB098	追求卓越(最新修訂版)	畢德士　等	天下編譯	220	
CB099	跳躍的靈魂—「美體小舖」安妮塔傳奇	安妮塔	黃孝如	280	
CB100	創世紀	保羅．甘迺迪	顧淑馨	320	
CB101	企業大轉型—資訊科技時代的競爭優勢	凱恩	徐炳勳	250	
CB102	大潮流—目擊全球現場	萊特　等	李宛蓉	280	
CB103	反敗爲勝—汽車巨人艾科卡自傳	艾科卡　等	賈堅一　等	250	
CB104	經典管理—世界名著中的管理啓示	克萊蒙　等	張定綺	240	
CB105	小故事，妙管理	阿姆斯壯	黃炎媛	220	
CB106	專業風采	畢克斯樂	黃治蘋	240	

國立中央圖書館出版品預行編目資料

跳出思路的陷阱：有趣的推理 / 葛登能(Martin Gardner)著；薛美珍譯. --第一版. --臺北市：天下文化出版；〔臺北縣三重市〕：黎銘總經銷, 1993[民82]
面； 公分, --（天下人知識系列；1）
譯自：Aha! Gotcha：paradoxes to puzzle and delight
ISBN 957-621-189-1（平裝）
1.數學遊戲
997.6 82006889

天下人知識系列①

跳出思路的陷阱——有趣的推理

原　著 / 葛登能
譯　者 / 薛美珍
編　輯 / 曾陽晴
美術編輯 / 李錦鳳
封面設計 / 蔡泉安
社　長 / 高希均
發行人 / 王力行
法律顧問 / 理律法律事務所陳長文律師、常青國際法律事務所
出版者 / 天下文化出版股份有限公司
地　址 / 台北市 104 松江路 87 號四樓
電　話 / (02)507-8627
直接郵撥帳號 / 1326703-6 號　天下文化出版股份有限公司
製版廠 / 利全美術製版股份有限公司
印刷廠 / 盈昌印刷有限公司
裝訂廠 / 政春實業有限公司
登記證 / 局版台業字第 2517 號
總經銷 / 黎銘圖書有限公司　電話 / (02)981-8089

出版日期 / 1993 年 9 月 30 日第一版
1996年1月30日第一版第13次印行(31, 501～33, 500本)
定價 / 150 元
原著書名 / ***Aha! Gotcha***
by Martin Gardner
First published in the United States
by W. H. Freeman and Company, New York, New York and Oxford

ISBN：957-621-189-1（英文版ISBN：0-7167-1361-6）



黏在牆上的牌子寫著：「萬一這個牌子掉落，請通知本人。」類似這種啼笑皆非的矛盾，生活中處處可見。這種矛盾都是因為掉入了邏輯推理的陷阱而不自知。本書作者以通俗、有趣的文字，輔以幽默、令人會心的漫畫，點出種種矛盾之所以形成的前因後果，讓您茅塞頓開，打開思路上的任督二脈。

ISBN 957-621-189-1 (997)
00150
9 789576 211898
定價150元